ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

С. Н. Черников

ВВЕДЕНИЕ

Системой линейных неравенств называют обычно конечную или бесконечную систему вида

$$f_\alpha(x) - a_\alpha = a_{\alpha 1}x_1 + \ldots + a_{\alpha n}x_n - a_\alpha \leqslant 0 \quad (\alpha \in M), \qquad (1)$$

где $a_{\alpha k}$ и a_α — заданные действительные числа, x_k — неизвестные и α — индекс, пробегающий то или иное множество значений (множество M). Конечные системы такого вида изучаются еще со времен Фурье, предложившего в 20-х годах прошлого столетия метод исключения неизвестных для их решений. Особое внимание в прошлом столетии привлекли к ним работы М. В. Остроградского по аналитической механике.

К исследованию систем вида (1) сводятся задача о наилучшем приближении функций, заданных таблицей, посредством многочленов, а также классическая задача о наилучшем приближении функции, заданной на отрезке. Эта идущая от П. Л. Чебышева тема определила так называемое экстремальное направление в теории линейных неравенств, направление, которое тесно соприкасается с общей теорией приближения функций, задачами минимакса, теорией моментов и т. д.

Другое направление в теории линейных неравенств, геометрическое направление, берущее начало в известных исследованиях Г. Ф. Вороного, посвященных квадратичным формам целочисленных переменных, имеет своей общей задачей изучение того выпуклого полиэдрального множества n-мерного действительного пространства R^n, которое определяется решениями конечной системы (1). Основными здесь являются вопрос совместности конечной системы (1) и вопросы геометрического строения множества ее решений (размерность, ограниченность и неограниченность, расположение его вершин, ребер и граней произвольной размерности). Это направление тесно соприкасается с теорией систем линейных уравнений, с теорией выпуклых тел пространства R^n и некоторыми вопросами функционального анализа и общей теории топологических векторных пространств.

В конце 30-х годов текущего столетия открывается большая область для применения линейных неравенств — область планово-экономических расчетов; началом исследований здесь явились работы Л. В. Канторовича [7] и [8]. Для решения практических задач потребовались эффективные алгоритмы. Линейные неравенства привлекают внимание многих математиков; возникает целое направление исследований — линейное программирование, основной задачей которого является задача максимизации (минимизации) линейной функции на множестве решений конечной системы линейных неравенств. Это направление особенно бурно развивается в 50-е годы.

Одновременно с поисками и разработкой алгоритмов для решения практических задач идет разработка теории конечных систем линейных неравенств. В течение последнего десятилетия оформляется алгебраический аспект этой теории и ряд ее теорем распространяется на системы линейных неравенств с коэффициентами из произвольного упорядоченного поля (см. Бургер [32], Кун [42], Чарнес и Купер [33], Черников [19, 24] и др.). Теория конечных систем линейных неравенств становится ветвью линейной алгебры, вырастающей из нее при дополнительном предположении об упорядоченности основного поля; краткости ради будем называть ее алгебраической теорией линейных неравенств (а.т.л.н.). Методы линейной алгебры в ней соединяются с финитными методами, действующими в произвольных упорядоченных полях.

Настоящая статья дает обзор основных результатов а.т.л.н., причем некоторые из них приводятся с доказательствами, что дает представление о методах а.т.л.н.

Для случая систем линейных неравенств в действительной области почти все результаты, содержащиеся в настоящей статье, либо известны, либо являются непосредственными обобщениями известных результатов. В этом аспекте ее можно рассматривать как обзор основных результатов, относящихся к конечным системам линейных неравенств, за последние десять лет; понятно, что при этом приходится касаться и некоторых более ранних результатов. Однако здесь она не может служить обзором. В связи с этим целесообразно отметить статью Дайнса и Маккоя [34], содержащую достаточно подробный обзор результатов, относящихся к линейным неравенствам, за первое тридцатилетие нашего столетия и статью Фань Цзи [12], в которой приводятся ранее полученные результаты многих авторов.

Настоящая статья не содержит обзора результатов, полученных в линейном программировании; эта ветвь теории линейных неравенств так разрослась, что ей следует посвятить специальный обзор. С линейным программированием можно познакомиться в одной из многочисленных книг, дающих систематическое его изложение, например, в известной книге Гейла [5]. Что же касается самой теории линейного программирования, то достаточно полное представление о ней дает статья Голдмана и Таккера [41]. Отметим здесь, что, пользуясь теоремой Минковского—Фаркаса и принципом максимума, которые излагаются во второй главе настоящей статьи, можно без труда получить все предложения этой теории, методами а.т.л.н.. К сожалению, ограниченный объем статьи не позволяет более подробно коснуться этого вопроса.

По той же причине не нашли отражения в ней и результаты алгебраического характера, полученные в последнее время при исследовании некоторых бесконечных систем линейных неравенств, удовлетворяющих условию финитной определенности [23].

Отметим, наконец, что в течение десятилетия, с которым в основном связана настоящая статья, появилось немало исследований, касающихся линейных неравенств на топологических линейных пространствах (см., например, [35] и [29]). Накопившиеся здесь многочисленные результаты заслуживают, на наш взгляд, отдельного, специально им посвященного, обзора.

ГЛАВА I

ПРИНЦИП ГРАНИЧНЫХ РЕШЕНИЙ

В основу алгебраической теории линейных неравенств может быть положено следующее простое предложение (принцип граничных решений).

Если конечная система линейных неравенств ранга $r>0$ совместна, то хотя бы одно ее решение обращает в равенства r ее неравенств, составляющих подсистему ранга r.

Это предложение, ранее известное для систем линейных неравенств в комплексной и действительной областях (см. [13, 14, 16]), в настоящей статье дается (в некоторой эквивалентной форме — см. теорему 1.1) в предположении, что основным полем является произвольное упорядоченное поле.

Принцип граничных решений получил многочисленные приложения в теории линейных неравенств. На его основе получен ряд алгебраических критериев, отражающих те или иные свойства множества решений произвольной конечной системы линейных неравенств над полем R действительных чисел (пустоту или непустоту, вырожденность или невырожденность, ограниченность или неограниченность и некоторые другие свойства); некоторые из этих критериев отмечены в §§ 2—3 настоящей главы. На основе принципа граничных решений была получена общая (параметрическая) формула решений такой системы [12] и ряд теорем теории конечных систем линейных неравенств [35].

§ 1. ПРИНЦИП ГРАНИЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть $L = L(P)$ — произвольное линейное пространство над упорядоченным полем P. Систему

$$f_j(x) - a_j \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

где $f_j(x)$ — линейные (т. е. аддитивные и однородные) функции на $L(P)$ со значениями из P и $a_j \in P$, назовем системой линейных неравенств над пространством $L(P)$; элементы a_j будем называть свободными членами системы (1). В случае пространства P^n (в частности, в случае пространства R^n) система (1) принимает вид

$$f_j(x) - a_j = l_j(x_1, \ldots, x_n) - a_j = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0; \tag{2}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m),$$

где все коэффициенты a_{ji} и свободные члены a_j — элементы поля P (соответственно, элементы из R).

Определение 1.1. Некоторое решение системы (1) отличного от нуля ранга (ранг системы (1) — максимальное число линейно независимых среди входящих в нее функций $f_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$)) называется ее граничным решением, если оно обращает в равенство хотя бы одно из ее неравенств с ненулевой функцией $f_j(x)$. Граничное решение системы (1) ранга $r > 0$ называется ее узловым решением, если оно обращает в равенства какие-нибудь r ее неравенств с линейно независимыми (над полем P) функциями $f_j(x)$.

Определение 1.2. Некоторую подсистему системы (1) отличного от нуля ранга назовем крайней подсистемой, если ее ранг отличен от нуля и совпадает с числом неравенств в ней и если хотя бы одно ее узловое решение удовлетворяет всей системе (1). Крайнюю подсистему назовем узловой подсистемой системы (1), если все ее узловые решения удовлетворяют последней.

Отметим следующие свойства крайних подсистем.

1. Каждая совместная система (1) отличного от нуля ранга обладает хотя бы одной крайней подсистемой.

2. Если ранг какой-нибудь крайней подсистемы отличен от ранга системы (1), то она содержится в некоторой крайней подсистеме с большим числом неравенств.

3. Крайняя подсистема тогда и только тогда является узловой подсистемой системы (1), когда ее ранг совпадает с рангом последней.

Если x' — некоторое решение системы (1), x'' — некоторый элемент из $L(P)$, не удовлетворяющий ей, и t — произвольный элемент из P, удовлетворяющий неравенствам $0 \leqslant t \leqslant 1$ (совокупность таких элементов из P будем обозначать через $P[0, 1]$), то, подставляя $x = x(t) = x' + t(x'' - x')$ в систему (1), получаем систему вида (2) с одним неизвестным t, имеющую ранг 1. Она, очевидно, имеет решение $t^0 \in P[0, 1]$, обращающее в равенство хотя бы одно из ее неравенств с ненулевым коэффициентом при t. Тогда $x(t^0)$—решение системы (1), обращающее в равенство соответствующее неравенство системы (1). Последнее, очевидно, составляет одну из крайних подсистем системы (1), что и доказывает свойство 1.

Доказательства свойств 2 и 3 существенно опираются на следующее общеизвестное предложение.

Лемма 1.1. Если $f_1(x), \ldots, f_m(x)$—произвольная линейно независимая (над P) система линейных функций, определенных на пространстве $L(P)$, со значениями из поля P, то для любых элементов $a_j \in P$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ система уравнений

$$f_j(x) - a_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

имеет хотя бы одно решение в $L(P)$.

Упорядоченность поля P здесь не имеет значения.

Доказательство свойства 2. Пусть

$$f_{j_k}(x) - a_{j_k} \leqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l) \tag{3}$$

— некоторая крайняя подсистема системы (1) с l меньшим ранга r системы (1) и x^0 — некоторое ее узловое решение, удовлетворяющее системе (1). Так как $l < r$, то существует линейно независимая система функций $f_{j_1}(x), \ldots, f_{j_l}(x)$, $f_{j'}(x)$. Ввиду леммы 1.1 система

$$f_{j_k}(x) - a_{j_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l)$$
$$f_{j'}(x) - (a_{j'} + \varepsilon) = 0 \quad (\varepsilon \in P, \ \varepsilon > 0)$$

совместна. Пусть $\overline{x} \in L(P)$ — какое-нибудь ее решение. Подставляя

$$x(t) = x^0 + t(\overline{x} - x^0) \quad (t \in P[0, 1])$$

в систему (1), получаем систему ранга 1 с неизвестным t. Она, очевидно, имеет решение $t^0 \in P[0, 1]$, обращающее в равенство хотя бы одно из ее неравенств с ненулевым коэффициентом при t. Присоединяя соответствующее ему неравенство системы (1) к подсистеме (3), получаем новую крайнюю подсистему системы (1). Свойство 2 доказано.

Свойство 3 оставим без доказательства. Впрочем, достаточность там очевидна.

Из свойств 1, 2 и достаточности утверждения, относящегося к свойству 3, вытекает

Теорема 1.1. Каждая совместная система (1) отличного от нуля ранга имеет хотя бы одну узловую подсистему, а значит, и хотя бы одно узловое решение.

Это предложение и будет называться ниже принципом граничных решений.

§ 2. УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НАД ПРОСТРАНСТВОМ P^n

Определение 1.3. Узлом системы (2) ранга $r > 0$ называется такой отличный от нуля минор r-го порядка ее матрицы A, при котором выполняются соотношения

$$\Delta_j \mid \Delta \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\Delta_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ — определители, получающиеся окаймлением Δ снизу и справа соответственно элементами произвольной строки матрицы A и элементами a_j (сопровождающие Δ определители системы (2)).

Из теоремы 1.1. вытекает следующее условие совместности системы (2).

Теорема 1.2. (Для $P=R$ [1.4]) Система (2) линейных неравенств отличного от нуля ранга тогда и только тогда совместна, когда она имеет хотя бы один узел.

Определение 1.4. Сечением системы (2) называется любая получающаяся из нее система при вычеркивании всех членов с теми или другими неизвестными. Сечение системы (2) отличного от нуля ранга называется правильным, если его ранг совпадает с числом входящих в него неизвестных. Правильное сечение называется главным сечением, если его ранг совпадает с рангом системы (2).

Из теоремы 1.2 вытекает

Следствие 1.1. Если система (2) отличного от нуля ранга совместна, то совместно и каждое ее главное сечение.

С помощью теоремы 1.2 без труда получается следующее обобщение теоремы Кронекера — Капелли.

Теорема 1.3. Пусть $r > 0$ — ранг системы

$$\begin{aligned} &a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m), \\ &b_{j1}x_1 + \ldots + b_{jn}x_n - b_j = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, p) \end{aligned} \tag{4}$$

(над пространством P^n) и $r' > 0$ — ранг, содержащейся в ней системы уравнений. Тогда для совместности системы (4) необходимо и достаточно, чтобы в матрице ее коэффициентов существовал такой отличный от нуля минор Δ r-го порядка, содержащий r' строк, составленных из коэффициентов уравнений системы (4), что равны нулю все те сопровождающие его определители этой системы, которые отвечают ее уравнениям и неотрицательны все те, которые отвечают ее неравенствам.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 1.2

Определение 1.5. Решение $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ системы (2) называется неотрицательным (неположительным), если все его координаты неотрицательны (неположительны), положительным (отрицательным), если при этом $x_1^0 + \ldots + x_n^0 > 0$ (<0), и строго положительным (строго отрицательным), если все его координаты положительны (отрицательны). Решение $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ называется неположительным (неотрицательным) относительно совокупности неизвестных $x_{k_1}, \ldots, x_{k_l}$ и соответственно-положительным (отрицательным) и строго положительным (строго отрицательным) относительно этой совокупности, если рассматриваемым здесь условиям удовлетворяют его координаты с номерами $k_1, \ldots, k_l$.

Теорема 1.4 (Для $P = R$ [15]). Если система (2) отличного от нуля ранга не имеет нулевого решения, то для того, чтобы она имела неотрицательное (неположительное) относительно совокупности неизвестных $x_{k_1}, \ldots, x_{k_l} (l \leqslant n)$ решение, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно ее правильное сечение имело такое узловое решение, все координаты которого были бы отличными от нуля, а встречающиеся в нем координаты с номерами $k_1, \ldots, k_l$ — положительными (отрицательным).

Получается с помощью теоремы 1.2 и следующей леммы, представляющей и некоторый самостоятельный интерес.

Лемма 1.2. Если какой-нибудь элемент произвольного линейного пространства $L(P)$ линейно выражается с неотрицательными коэффициентами из поля P через какую-нибудь систему элементов из $L(P)$, имеющую отличный от нуля ранг, то он линейно выражается с неотрицательными коэффициентами (из P) через некоторую ее линейно независимую подсистему.

Следствие 1.2. Если система (2) отличного от нуля ранга не имеет нулевого решения, то для того чтобы она имела положительное (отрицательное) решение, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно ее правильное сечение имело строго положительное (строго отрицательное) узловое решение.

Определение 1.6. Систему (1) назовем устойчиво совместной или просто устойчивой, если она имеет решение, для которого все ее неравенства становятся строгими неравенствами (устойчивое решение).

Теорема 1.5. [14]. Система (2) отличного от нуля ранга тогда и только тогда устойчиво совместна, когда она имеет такой узел Δ, что каждый равный нулю сопровождающий Δ определить при замене элементов его правого столбца единицами либо приобретает знак противоположный знаку Δ, либо остается равным нулю.

Пользуясь этой теоремой, нетрудно убедиться, что если система (2) устойчиво совместна, то устойчиво совместно каждое ее главное сечение.

Определение 1.7. Если $h=(h_1, \ldots, h_n)$ — какой-нибудь ненулевой элемент пространства P^n, то множество oh элементов $Ph=(ph_1, \ldots, ph_n)$, где p — произвольный элемент из P^n, назовем осью пространства P^n, определяемой элементом h. Множество M элементов из P^n называется неограниченным относительно оси oh, неограниченным в положительном (отрицательном) направлении оси oh, если функция $f(x)=h_1x_1+ +\ldots+h_nx_n$ на нем соответственно неограничена, неограничена сверху (снизу). Множество M называется ограниченным (в пространстве P^n), если оно ограничено относительно каждой оси пространства P^n.

Множество, очевидно, тогда и только тогда ограничено, кода оно ограничено относительно каждой координатной оси X_i пространства P^n.

Вопрос о неограниченности множества решений системы (2) в положительном направлении оси oh пространства P^n равносилен вопросу о неограниченности множества решений системы

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$-h_1x_1 - \ldots - h_nx_n + x_{n+1} \leqslant 0$$

(над пространством P^{n+1}) в положительном направлении оси X_{n+1} пространства P^{n+1}.

С помощью теоремы 1.2 получается

Теорема 1.6. (Для $P=R$ [14]). Если ранг r_i матрицы A_i, полученной из матрицы A совместной системы (2) вычеркиванием ее i-го столбца, отличен от нуля, то необходимым и достаточным условием неограниченности множества решений системы (2) в положительном (отрицательном) направлении оси X_i пространства P^n является существование в матрице A_i такого отличного от нуля минора Δ r_i-го порядка, что среди определителей, полученных окаймлением его с помощью i-го столбца и произвольной строки матрицы A не встречаются определители, совпадающие по знаку с минором Δ (противоположные по знаку минору Δ).

Следствие 1.3. Если ранг совместной системы (2) совпадает с числом n ее неизвестных и $n>1$, то для ограниченности множества ее решений в пространстве P^n необходимо и достаточно, чтобы для произвольного отличного от нуля минора Δ $n-1$-го порядка матрицы A системы (2) выполнялось следующее условие: определители, полученные окаймлением минора Δ с помощью столбца из A, не имеющего общих элементов с Δ, и произвольной строки матрицы A, дают хотя бы одну перемену знака.

ГЛАВА II

ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО — ФАРКАША И ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Первый существенный вклад в теорию линейных неравенств был сделан Г. Минковским, опубликовавшим в 1896 году в своей книге «Геометрия чисел» [43] теорему о неравенствах — следствиях конечной системы

$$f_j(x) = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \leqslant 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1)$$

(a_{ji} — действительные числа) и теорему о конечности множества образующих элементов конуса решений такой системы в случае, когда ее ранг равен числу n (общий случай без труда сводится к этому случаю). После опубликования теорем Минковского появилось в разное время в Европе, Америке и Японии много работ, которые более или менее непосредственно их касались. Результатам этих работ посвящен вышедший в 1933 году обстоятельный обзор Дайнса и Мак—Коя [34].

Первая из двух отмеченных теорем Минковского утверждает, что если все решения написанной здесь системы (1) удовлетворяют некоторому неравенству

$$f(x)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n\leqslant 0,$$

то существуют такие неотрицательные числа $p_1, \ldots, p_m$, при которых справедливо тождественное относительно $x_1, \ldots, x_n$ соотношение

$$f(x)=\sum_{j=1}^{m} p_j f_j(x).$$

Вторая теорема Минковского утверждает существование такого конечного множества решений $(b_{k1}, \ldots, b_{kn})$ $(k=1, 2, \ldots, l)$ системы (1), что любое ее решение может быть получено из формулы

$$(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{k=1}^{l} q_k(b_{k1}, \ldots, b_{kn})$$

при подходяще выбранных неотрицательных значениях параметров $q_1, \ldots, q_l$.

Из этих теорем вытекает, что для каждой конечной системы (1) существует такая конечная система

$$b_{k1}x_1+\ldots+b_{kn}x_n\leqslant 0 \quad (k=1, 2, \ldots, l),$$

множество решений которой совпадает с двойственным конусом системы (1) (двойственный конус системы вида (1) — это конус, порожденный векторами коэффициентов ее неравенств) и двойственный конус которой — с множеством решений системы (1). Это предложение является одним из выражений так называемого принципа двойственности теории линейных неравенств.

Принципу двойственности и связанным с ним алгебраическим и геометрическим вопросам посвящена вышедшая в 1936 году работа Г. Вейля «Элементарная теория выпуклых многогранников» [3]. В этой работе решается задача построения теории выпуклых многогранников пространства R^n (и вместе с тем — теории конечных систем линейных неравенств над полем R) с помощью одних лишь «финитных» методов, т. е. методов линейной алгебры, дополненных конечными методами, отражающими упорядоченность поля R действительных чисел, без привлечения нефинитных методов, связанных с замкнутостью и компактностью и, в частности, методов, опирающихся на теорему отделимости замкнутых выпуклых множеств пространства R^n.

В отмечавшейся уже статье Чарнеса и Купера [33] было показано, что вторая теорема Минковского остается в силе при переходе от поля R действительных чисел к произвольному упорядоченному полю. Что к числу таких теорем относится и его первая теорема, нетрудно усмотреть из ее доказательства, которое приведено в статье автора [19]. Поэтому к числу таких теорем относится и принцип двойственности, непосредственно вытекающий из теорем Минковского.

В настоящей главе содержится обзор результатов, имеющих непосредственное отношение к отмеченным здесь теоремам, причем все они формулируются для систем линейных неравенств над произвольным упорядоченным полем, иначе говоря, они даются как результаты алгебраической теории линейных неравенств. Для иллюстрации методов этой теории некоторые из них приводятся с доказательствами.

§ 1. ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО — ФАРКАША

Определение 2.1. Линейное неравенство

$$f(x)-a\leqslant 0 \tag{2}$$

над $L(P)$) называется следствием совместной системы

$$f_j(x)-a_j\leqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{3}$$

над пространством $L(P)$, если ему удовлетворяют все ее решения

$L(P)$ — здесь и везде ниже — произвольное линейное пространство над упорядоченным полем P.

Теорема 2.1. Если линейное неравенство $f(x)\leqslant 0$ является следствием системы

$$f_j(x)\leqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{4}$$

(над $L(P)$), то существуют такие неотрицательные элементы $p_1, \ldots, p_m$ поля P, для которых имеет место тождественное относительно $x\in L(P)$ соотношение

$$f(x)=\sum_{j=1}^{m}P_jf_j(x).$$

Доказательство. Если U—максимальное подпространство из $L(P)$, на котором каждая из функций $f_j(x)$ принимает только нулевые значения, и $v_1, \ldots, v_r$—базис какого-нибудь его прямого дополнения V, то получаем, что неравенство

$$f(u+x_1v_1+\ \ldots\ +x_rv_r)=x_1f(v_1)+\ldots+x_rf(v_r)\leqslant 0$$

является следствием системы

$$f_j(u + x_1v_1 + \ldots + x_rv_r) = x_1f_j(v_1) + \ldots + x_rf_j(v_r) \leqslant 0$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

(здесь $x = u + x_1v_1 + \ldots + x_rv_r$ — произвольный элемент из $L(P)$ и $u \in U$). Пользуясь здесь отмеченным во введении частным случаем доказываемой теоремы (для произвольного упорядоченного поля P), получаем требуемое соотношение.

Так как при $r = 0$ оно, очевидно, справедливо, то теорема доказана.

Ссылаясь ниже на теорему Минковского, мы будем иметь ввиду теорему 2.1.

Теорема 2.2. Система (3) тогда и только тогда несовместна, когда существуют такие неотрицательные элементы $p_1, \ldots, p_m$ поля P, при которых имеет место тождественное относительно $x \in L(P)$ соотношение

$$\sum_{j=1}^{m} p_jf_j(x) = 0$$

и неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} p_ja_j < 0.$$

Достаточность здесь очевидна. Пусть система (3) несовместна. Тогда неравенство $t \leqslant 0$ является следствием системы

$$f_j(x) - a_jt \leqslant 0 \ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (5)$$

Применяя здесь теорему 2.1, без труда получаем необходимость утверждения теоремы.

При $P = R$ теорема доказана (нефинитными методами) в статье Фань Цзи [35] и является одной из ее основных теорем; для систем линейных неравенств над пространством R^n (общий случай без труда сводится и этому частному случаю) она ранее установлена А. Д. Александровым [1].

Лемма 2.1. Линейное неравенство $f(x) - a \leqslant 0$ (над $L(P)$) тогда и только тогда является следствием совместной системы (3), когда неравенство $f(x) - at \leqslant 0$ является следствием системы (5), дополненной неравенством $-t \leqslant 0$.

Из леммы 2.1 и теоремы 2.1 вытекает

Теорема 2.3. Если линейное неравенство (2) является следствием совместной системы (3), то существуют такие неотрицательные элементы $p_0, p_1, \ldots, p_m$ поля P, для которых имеет место тождественное относительно $x \in L(P)$ соотношение

$$f(x) - a = \sum_{j=1}^{m} p_j(f_j(x) - a_j) - p_0.$$

Ссылаясь ниже на теорему Минковского — Фаркаша, мы будем иметь в виду эту теорему.

Для систем линейных неравенств над пространством $L(R) = R^n$ теорема 2.3 установлена еще Фаркашем [36]; для систем линейных неравенств над произвольным линейным пространством $L(R)$ она доказана (нефинитными методами) Фань Цзи [35]. Справедливость теоремы в случае пространства $L(P)$ над произвольным упорядоченным полем P отмечена в статье автора [24].

Теорема 2.4. Если линейное неравенство (2) является следствием совместной системы (3) отличного от нуля ранга, то оно является следствием хотя бы одной ее узловой подсистемы.

Для доказательства см. статью автора [19]. Из теоремы 2.4 вытекает

Теорема 2.5. Если система (3) ранга r несовместна, то несовместна хотя бы одна ее подсистема ранга r из $r+1$ неравенств.

Следствие 2.1. Система (3) ранга r устойчиво совместна, если устойчиво совместны все ее подсистемы ранга r из $r+1$ неравенств.

Системы ранга r из $r+1$ неравенств над пространством R^n изучались Школьником в работах [27] и [28] и Фань Цзи в работе [35]. Основные результаты Школьника являются следствиями теоремы 1.2 и потому остаются в силе при переходе от поля R к произвольному упорядоченному полю P. Результаты Фань Цзи могут быть получены в качестве следствий результатов Школьника.

В качестве непосредственных следствий теоремы 2.3 отметим следующие предложения.

Теорема 2.6. Совместная система (3) тогда и только тогда устойчиво совместна, когда не существует ни одного такого набора неотрицательных, но не сплошь равных нулю элементов $q_0, q_1, \ldots, q_m$ поля P, для которого имело бы место тождественное относительно $x \in L(P)$ соотношение

$$\sum_{j=1}^{m} q_j(f_j(x) - a_j) - q_0 = 0.$$

Теорема 2.6 дает обобщение известного критерия Вороного [4] для n-мерности множества решений системы (1).

Теорема 2.7. (При $P=R$ установлена Таккером [44]). Для любой матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

с элементами из произвольного упорядоченного поля P хотя бы одно неотрицательное относительно неизвестных $u_1, \dots, u_m$ (относительно $u=(u_1, \dots, u_m)$) решение $(x, u)=(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$ системы

$$\begin{aligned} l_j(x) &= a_{j1}x_1+\dots+a_{jn}x_n \geqslant 0 \quad (j=1,2,\dots,m) \\ l_i'(u) &= a_{1i}u_1+\dots+a_{mi}u_m = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \tag{6}$$

удовлетворяет системе

$$l_j(x)+u_j=a_{j1}x_1+\dots+a_{jn}x_n+u_j>0 \quad (j=1,2,\dots,m) \tag{7}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого неравенства $l_j(x)+u_j>0$ существует удовлетворяющее ему неотрицательное относительно u решение (x^j, u^j) системы (6). В самом деле, тогда неотрицательное относительно u решение $(x^0, u^0)=(x^1, u^1)+\dots+(x^m, u^m)$ системы (6) будет удовлетворять системе (7).

Пусть $l_{j_0}(x)+u_{j_0}>0$ — такое неравенство системы (7), которому не удовлетворяет ни одно из неотрицательных относительно u решений системы (6). Тогда все решения такого рода должны удовлетворять неравенству

$$l_{j_0}(x)+u_{j_0}\leqslant 0. \tag{8}$$

Пользуясь здесь теоремой 2.3, получаем тождественное относительно $x \in P^n$ соотношение $l_{j_0}(x)=-(p_1l_1(x)+\dots+p_ml_m(x))$, из которого вытекает, что $p=(p_1,\dots,p_{j_0-1}, p_{j_0+1}, p_{j_0}+1,\dots,p_m)$— неотрицательное решение системы $l_i'(u)=0\,(i=1,2,\dots,n)$ с отличной от нуля j_0-й координатой и что все решения системы $l_j(x)\geqslant 0$ $(j=1,2,\dots,m)$ удовлетворяют уравнению $l_{j_0}(x)=0$. Но тогда для любого решения x этой системы неотрицательное относительно u решение (x, u) системы (6) с $u=p$ не будет удовлетворять неравенству (8). Полученное противоречие доказывает интересующее нас утверждение. Теорема доказана.

Теорема 2.8 (Принцип максимума [24]). Если линейная функция $f(x)$ ограничена сверху на множестве M решений совместной системы (3), то среди ее значений на M существует наибольшее значение $T=\max\limits_{x\in M} f(x)$. Если при этом ранг r системы (3) отличен от нуля, то существует такая узловая подсистема последней, что $f(x)\leqslant T$ для всех ее решений и $f(x)=T$ для всех ее узловых решений.

При $P=R$ первая часть этой теоремы известна как одно из предложений, лежащих в основе линейного программирования.

Доказательство. Так как в случае системы (3) ранга равного нулю первое утверждение теоремы является очевидным, то будем предполагать здесь, что он отличен от нуля. Пусть на множестве M $f(x)\leqslant a$ $(a\in P)$. Тогда ввиду теоремы 2.4. неравенство $f(x)-a\leqslant 0$ является следствием некоторой узловой подсистемы S:

$$f_{j_k}(x)-a_{j_k}\leqslant 0\ (k=1,2,\ldots,r)$$

системы (3). В силу теоремы 2.3 существуют такие неотрицательные элементы $p_0, p_1, \ldots, p_r$ поля P, при которых справедливо тождественное относительно $x\in L(P)$ соотношение

$$f(x)-a=\sum_{k=1}^{r} p_k(f_{j_k}(x)-a_{j_k})-p_0.$$

Из него вытекает, что неравенство $f(x)-T\leqslant 0$ с $T=a-p_0$ является следствием подсистемы S и что $f(x)=T$ для всех ее узловых решений. Так как все они удовлетворяют исходной системе (3) и так как неравенство $f(x)-T\leqslant 0$ является, очевидно, следствием последней, то теорема доказана.

Теорема 2.9. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,\ldots,y_n)$ — произвольные элементы пространства P^n (P — любое упорядоченное поле), удовлетворяющие соответственно условиям:

$$-x_i\leqslant 0\,(i=1,2,\ldots,n),\ x_1+\ldots+x_n=1, \tag{9}$$

$$-y_i\leqslant 0\,(i=1,2,\ldots,n),\ y_1+\ldots+y_n=1 \tag{10}$$

и (a_{ij}) — какая-нибудь матрица степени n с элементами из поля P. Тогда существуют

$$\min_y\max_x\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \quad\text{и}\quad \max_x\min_y\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

и равны между собой.

При $P = R$ эта теорема известна как теорема Дж. фон Неймана о мнимаксе (см. Беккенбах и Беллман [2]). В статье автора [24] отмечено что она остается в силе при переходе от поля R к произвольному упорядоченному полю P.

Теорема 2.8 используется здесь следующим образом. Так как при фиксированных значениях $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющих условиям (10) линейная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)\, x_i$$

с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, очевидно, ограничена на многограннике M_1 решений системы (9) (уравнение в ней можно заменить равносильной ему парой неравенств), то ввиду теоремы 2.8 ее значение хотя бы в одной из его вершин

$$(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$$

является наибольшим значением на M_1. Следовательно

$$\max_{x \in M_1} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = \max_{i} (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n). \tag{11}$$

Аналогично при фиксированных значениях $x_1, \ldots, x_n$ получается соотношение

$$\min_{y \in M_2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = \min_{j} (a_{1j}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n) \tag{12}$$

(M_2 — многогранник решений системы (10)).

Пусть далее T_1 — наименьшее значение неизвестного y_{n+1}, при котором совместна система

$$\begin{gathered} -y_i \leqslant 0\,(i = 1, 2, \ldots, n),\ y_1 + \ldots + y_n = 1, \\ a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n - y_{n+1} \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{13}$$

T_2 — наибольшее значение неизвестного x_{n+1}, при котором совместна система

$$\begin{gathered} -x_i \leqslant 0\,(i = 1, 2, \ldots, n), x_1 + \ldots + x_n = 1, \\ -a_{1j}x_1 - \ldots - a_{nj}x_n + x_{n+1} \leqslant 0\ (j = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{14}$$

Ввиду теоремы 2.8 существование T_1 и T_2 здесь вытекает из ограниченности функций y_{n+1} и x_{n+1} соответственно снизу и сверху на множествах решений систем (13) и (14) (являющейся следствием ограниченности множеств M_1 и M_2).

Так как

$$T_1 = \min_{y \in M_2} \max_i (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)$$

$$T_2 = \max_{x \in M_1} \min_j (a_{1j}x_1 + \ldots + a_{nj}x_n),$$

то ввиду (11) и (12) вместе с этим доказано существование

$$\min_y \max_x \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \text{ и } \max_x \min_y \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

Если система (3) над пространством $L(P)$ несовместна, то на множестве N решений системы

$$f_j(x) - a_j \leqslant t \ (j = 1, 2, \ldots, m),$$

где t — параметр принимающий значения из поля P, рассматриваемой над пространством $L(P) + P^1$ (она, очевидно, совместна) функция $f(x, t) = t \ ((x, t) \in L(P) + P^1)$ ограничена снизу. Поэтому в силу теоремы 2.8 существуют такие $x_0 \in L(P)$ и $t_0 \in P$, что $f(x_0, t_0) = \min\limits_{(x,t) \in N} f(x, t)$. Так как система (3) по предположению несовместна, то $t_0 > 0$. Так как $f_j(x_0) - a_j \leqslant t_0$ и $t_0 = \min\limits_{(x, t) \in N} f(x, t)$, то система

$$f_j(x) - a_j \leqslant t_0 \ (j = 1, 2, \ldots, m)$$

совместна, а система

$$f_j(x) - a_j \leqslant t_0' < t_0 \ (j = 1, 2, \ldots, m)$$

несовместна ни при одном $t_0' < t_0$.

Определение 2.2. Если система (3) несовместна, то положительный элемент $t_0 \in P$, для которого система

$$f_j(x) - a_j \leqslant t_0 \ (j = 1, 2, \ldots, m)$$

совместна, но не устойчиво совместна, назовем мерой несовместности системы (3).

Из предыдущих рассуждений вытекает, что каждой несовместной системе линейных неравенств над пространством $L(P)$ отвечает единственный положительный элемент поля P, мера ее несовместимости.

Ввиду предполагаемой несовместности системы (3) система

$$f_j(x) - a_j \leqslant t \ (j = 1, 2, \ldots, m)$$

эквивалентна системе, которая получится присоединением к ней неравенства $-t \leqslant 0$. Применяя к последней и функции $f(x, t)$ теорему 2.8, получаем справедливость следующего утверждения (сформулированного без доказательства при $P = R$ в статье Еремина [6]).

Теорема 2.10. Мера t_0 несовместности несовместной системы (3) ранга $r > 0$ совпадает с наибольшей мерой несовместности ее несовместных подсистем ранга r из $r+1$ неравенств. Среди этих подсистем существует такая подсистема

$$f_{j_k}(x) - a_{j_k} \leqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r+1)$$

с мерой t_0 несовместности, что система

$$f_{j_k}(x) - a_{j_k} = t_0 \ (k = 1, 2, \ldots, r+1)$$

совместна и все ее решения удовлетворяют системе $f_j(x) - a_j \leqslant t_0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Следствие 2.2. Наименьшее уклонение системы линейных уравнений

$$l_j(x) - a_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

над $L(P)$) ранга $r > 0$, не содержащей нулевых функций $l_j(x)$, т. е. минимакс

$$l_0 = \min_{x \in L(P)} \max_j |l_j(x) - a_j|,$$

совпадает с наименьшим уклонением некоторой ее подсистемы ранга r из $r+1$ уравнений.

Существование и достижимость минимакса l_0 вытекает из теоремы 2.10, так как при $l_0 \neq 0$ l_0 является мерой несовместности системы

$$(-1)^j (l_j(x) - a_j) \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 2m)$$

Для случая пространства R^n это предложение установлено в статье Ремеза [11].

§ 3. ОТДЕЛИМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Для $P = R$ основные результаты настоящего параграфа опубликованы (без доказательств) в статье автора [18].

Определение 2.3. Непустое выпуклое множество пространства $L(P]$ называется полиэдральным, если оно является множеством решений какой-нибудь конечной системы линейных неравенств над $L(P)$.

Определение 2.4. Пусть A и B — два какие-нибудь множества пространства $L(P)$, $f(x)$ — ненулевая линейная функция на $L(P)$ и a — элемент поля P. Если $f(x) - a \leqslant 0$ для любого элемента $x \in A$ и $f(x) - a \geqslant 0$ для любого элемента $x \in B$, то говорят, что плоскость $f(x) - a = 0$ — разделяет множества A и B. Если равенство $f(x) - a = 0$ здесь не выполняется ни для одного $x \in A$ и ни для одного $x \in B$, то говорят, что плоскость $f(x)-a=0$ строго разделяет множества A и B. Множества A и B будем называть соприкасающимися, если они имеют общие элементы и если существует такой элемент $c \in L(P)$, что при сдвиге одного из них на элемент ct с любым $t>0$ ($t \in P$) получается множество, не имеющее общих элементов с другим.

Следует заметить, что тот же результат получается при сдвиге другого из этих множеств на элемент $-ct$.

Теорема 2.11. Если два выпуклых полиэдральных множества пространства $L(P)$ не имеют общих элементов, то существует плоскость пространства $L(P)$, строго разделяющая эти множества.

Доказательство. В самом деле, пусть A_1 и A_2 — два произвольных множества такого рода и

$$f_j^1(x)-a_j^1 \leqslant 0 \quad (j=1,2,\ldots,m_1),$$
$$f_j^2(x)-a_j^2 \leqslant 0 \quad (j=1,2,\ldots,m_2)$$

— определяющие их системы линейных неравенств. Если множества A_1 и A_2 не имеют общих элементов, то система, полученная соединением этих систем, несовместна. Но тогда в силу теоремы 2.2 существует такая тождественно равная нулю линейная комбинация

$$\sum_{j=1}^{m_1} p_j^1 f_j^1(x)+\sum_{j=1}^{m_2} p_j^2 f_j^2(x)$$

с неотрицательными p_j^1 и p_j^2, что

$$\sum_{j=1}^{m_1} p_j^1 a_j^1+\sum_{j=1}^{m_2} p_j^2 a_j^2<0.$$

Вводя обозначения

$$f(x)=\sum_{j=1}^{m_1} p_j^1 f_j(x),$$

$$-p_0=\sum_{j=1}^{m_1} p_j^1 a_j^1+\sum_{j=1}^{m_2} p_j^2 a_j^2 \text{ и } a=\frac{p_0}{2}+\sum_{j=1}^{m_1} p_j^1 a_j^1,$$

получаем соотношения

$$f(x)-a=\sum_{j=1}^{m_1} p_j^1 (f_j^1(x)-a_j^1)-\frac{p_0}{2},$$

$$-f(x)+a=\sum_{j=1}^{m_2} p_j^2 (f_j^2(x)-a_j^2)-\frac{p_0}{2},$$

из которых без труда усматривается, что плоскость $f(x) - a = 0$ строго разделяет множества A_1 и A_2.

Ввиду теоремы 2.4 из теоремы 2.11 вытекает

Следствие 2.3. Если две совместных системы вида (1) отличных от нуля рангов не имеют общих решений, то в них можно соответственно выделить две узловых подсистемы, не имеющих общих решений.

Лемма 2.2. Если два выпуклых полиэдральных множества A_1 и A_2 пространства $L(P)$ соприкасаются, то любые две определяющие их системы линейных неравенств над $L(P)$ имеют соответственно две таких подсистемы рангов, совпадающих с числом их неравенств, множества решений которых соприкасаются.

Доказательство сводится к применению теоремы 2.4.

Теорема 2.12. Два любых соприкасающихся выпуклых полиэдральных множества A_1 и A_2 пространства $L(P)$ разделяются некоторой плоскостью из $L(P)$.

Получается с помощью леммы 2.2 и теорем 2.2 и 2.3.

Определение 2.5. Если ранг совместной системы (3) линейных неравенств над $L(P)$ отличен от нуля, то определяемое ею в пространстве $L(P)$ полиэдральное множество M называется многогранником ее решений или просто ее многогранником. Гранью многогранника M системы (3) назовем его пересечение с множеством узловых решений произвольной ее крайней подсистемы. Грань, не содержащую отличных от нее граней, назовем минимальной гранью. Если многогранник M содержится в одном из двух полупространств, определяемых в $L(P)$ плоскостью $f(x)-a=0$ ($f(x)$ — ненулевая линейная функция на $L(p)$ и $a \in P$), и имеет с ней общие точки, то будем говорить, что многогранник M и эта плоскость соприкасаются, причем совокупность их общих точек назовем при этом следом их соприкосновения.

Независимость приведенного здесь определения граней многогранника от выбора определяющей его системы линейных неравенств вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.13. След соприкосновения многогранника M совместной системы (3) (отличного от нуля ранга) и плоскости является гранью этого многогранника. Обратно каждая грань многогранника M является следом его соприкосновения с некоторой плоскостью.

Получается с помощью теоремы 2.3

Теорема 2.14. Пусть A_1 и A_2 — два соприкасающихся выпуклых полиэдральных множества пространства $L(P)$ и D их пересечение. Тогда D содержится хотя бы в одной грани любого из них, причем существует такая разделяющая их плоскость S, след S_i $(i=1, 2)$ соприкосновения которой с множеством A_i $(i=1, 2)$ (очевидно, $S_i \supset D$) совпадает с наименьшей по включению гранью последнего, содержащей D.

Следствие 2.4. Если линейное подпространство H пространства P^n и полиэдральный острый конус C (полиэдральный конус называется острым, если его минимальная грань состоит из одного элемента) соприкасаются по вершине конуса (по минимальной грани), то существует такая проходящая через H плоскость пространства P^n, которая соприкасается с конусом C по его вершине.

Отсюда вытекает справедливость следующего предложения [31].

Если линейное подпространство H пространства P^n, имеющее размерность $h \leqslant n-2$, пересекается с неотрицательным ортантом пространства P^n лишь по одному элементу $\theta = (0, \ldots, 0)$, то существует такое содержащее H линейное подпространство $H' \subset P^n$ размерности $h+1$, которое не имеет отличных от θ общих элементов с этим ортантом.

Это предложение используется в цитированной статье Бен-Израеля как основное рабочее предложение при перенесении в ней некоторых теорем о конечных системах линейных неравенств над пространством R^n на конечные системы линейных неравенств над пространством P^n (P — произвольное упорядоченное поле) и, в частности, теоремы Таккера (см. теорему 2.7).

§ 4. ТЕОРЕМА ВЕЙЛЯ О ВЫПУКЛОМ КОНУСЕ С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ОБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Определение 2.6. Выпуклым конусом, порожденным конечной системой элементов

$$x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \quad (k = 1, 2, \ldots, l)$$

пространства P^n (P—произвольное упорядоченное поле) называется множество элементов $x \in P^n$, определяемых формулой

$$x = p_1 x^1 + \ldots + p_l x^l,$$

где $p_1, \ldots, p_l$—произвольные неотрицательные элементы из P; при этом элементы $x^1, \ldots, x^l$ называются его образующими элементами. Выпуклый конус с конечным множеством образующих элементов называется конечнопорожденным конусом.

Определение 2.7. Опорой конечного множества S элементов из P^n называется полупространство, определяемое в P^n таким неравенством

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant 0 \quad ((a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)),$$

которому удовлетворяют все элементы из S. Если $r>0$ — ранг множества S, то его опора называется крайней опорой, если определяющее ее неравенство обращается в равенство не менее чем для $r-1$ линейно независимых его элементов. Если $r=0$, то крайней опорой множества S будем считать любое полупространство из P^n с граничной плоскостью, проходящей через элемент $(0, \ldots, 0)$. Крайнюю опору множества S назовем крайней опорой первого рода, если определяющее ее неравенство обращается в равенство для r линейно независимых элементов из S, и крайней опорой второго рода в ином случае.

Две крайние опоры второго рода не будут считаться существенно различными, если определяющие их неравенства обращаются в равенства для некоторой подсистемы из $r-1$ линейно независимых элементов системы S.

Если $r=n$, то множество S не может иметь крайних опор первого рода. Ясно, что в этом случае у конечного множества S может существовать лишь конечное число крайних опор.

При $n=1$ неравенство, определяющее крайнюю опору множества S, не обращается в равенство ни для одного ненулевого элемента из S (иначе говоря, обращается в равенство для $n-1=0$ линейно независимых элементов из S). Аналогичное положение имеет место для крайних опор второго рода при $r=1$.

Лемма 2.3. Если неравенство

$$f(x) = a_1f_1(x) + \ldots + a_mf_m(x) \leqslant 0,$$

где $a_1, \ldots, a_m$ — элементы поля P, не является следствием системы линейных неравенств

$$f_j(x) \leqslant 0 \quad (j=1, 2, \ldots, m)$$

(над $L(P)$) ранга $r>0$, то существует такое ее неузловое решение $x=x^0$, обращающее в равенство $r-1$ ее неравенств с линейно независимыми функциями $f_j(x)$, для которого $f(x^0)>0$. Для $r=1$ x^0 не обращает в равенство ни одно из ее неравенств с ненулевой функцией $f_j(x)$. Доказательство без труда сводится к применению теоремы 1.1.

Из леммы 2.3 вытекает, что если неравенство

$$f(x) = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n \leqslant 0$$

(над P^n) не является следствием системы

$$f_j(x)=a_{j1}x_1+\ \dots\ +a_{jn}x_n\leqslant 0 \quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ m)$$

(над P^n) ранга n, то существует такое ее решение $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$, обращающее в равенства $n-1$ ее неравенств с линейно независимыми формами $f_j(x)$, для которого $f(x^0)>0$.

Лемма 2.4. (Для $P=R$ [3]). Если выпуклый конус C, порожденный конечной системой S элементов пространства P^n, имеющей ранг n отличен от P^n, то множество S имеет крайние опоры (конечное множество крайних опор) и их пересечение совпадает с C.

Доказательство. Пусть $(a_{j1},\dots,a_{jn})$ $(j=1,2,\dots,m)$ —произвольный элемент системы S. Если $b=(b_1,\dots,b_n)$— произвольный элемент из P^n, не содержащийся в C, то ввиду теоремы 2.3 неравенство

$$b_1x_1+\ \dots\ +b_nx_n\leqslant 0$$

не может быть следствием системы

$$a_{j1}x_1+\ \dots\ +a_{jn}x_n\leqslant 0\ (j=1,2,\dots,m),$$

отвечающей множеству S. Но тогда существует решение $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ этой системы, удовлетворяющее условиям следствия леммы 2.3. Ясно, что отвечающее ему полупространство

$$x_1^0x_1+\ \dots\ +x_n^0x_n\leqslant 0$$

является крайней опорой множества S, содержащей конус C и не содержащей элемент b. Ввиду произвольности элемента $b\,(b\overline{\in}C)$ отсюда вытекает утверждение леммы.

Для $P=R$ лемма 2.4 совпадает с фундаментальной теоремой Вейля о выпуклых пирамидах [3].

К лемме 2.4 без труда сводится

Теорема 2.15. Если выпуклый конус C, порожденный конечной системой S элементов пространства P^n, отличен от P^n, то множество S имеет крайние опоры и среди них можно выбрать конечное число опор, дающих в пересечении конус C.

В дополнение к этой теореме отметим, что множество S тогда и только тогда не имеет крайних опор второго рода, когда порожденный им конус совпадает с порожденным им подпространством из P^n. Если множество S имеет крайние опоры второго рода, то любая конечная совокупность T его крайних опор с пересечением C содержит хотя бы одну из них. Совокупность T можно выбрать так, чтобы все входящие в нее опоры второго рода были существенно различными.

Если совокупность полупространств пространства P^n дополнить несобственным полупространством $0x_1+\ldots+0x_n\leqslant 0$, совпадающим с P^n, то теорема 2.15 дает

Следствие 2.5. Конечно порожденный конус пространства P^n является пересечением конечного множества полупространств из P^n.

Следствие 2.6. Система

$$a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n\leqslant 0 \quad (j=1, 2, \ldots, m) \tag{15}$$

(над P^n) тогда и только тогда не имеет ненулевых решений, когда ее двойственный конус C' совпадает с P^n.

Определение 2.8. Выпуклый конус C', порожденный в пространстве P^n множеством A элементов $(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ называется двойственным конусом системы (15). Если H — какой-нибудь конечно-порожденный выпуклый конус пространства P^n, то двойственный конус H' произвольной конечной системы неравенств с множеством H ее решений (см. следствие 2.5) будем называть двойственным конусом для H.

С помощью теоремы 2.3 нетрудно установить, что конус H' не зависит от выбора системы линейных неравенств с множеством решений H.

Теорема 2.16. Конус C решений произвольной системы (15) совпадает с двойственным конусом C'' ее двойственного конуса C' и потому (в силу следствия 2.5) имеет конечное множество образующих элементов.

Доказательство. Если

$$a'_{i1}x_1+\ldots+a'_{in}x_n\leqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m')$$

— система неравенств с множеством решений C' (C'' — ее двойственный конус), то имеем

$$a'_{i1}a_{j1}+\ldots+a'_{in}a_{jn}\leqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m';\ j=1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда вытекает, что $\left(a'_{i1}, \ldots, a'_{in}\right)$ $(i=1, 2, \ldots, m')$ — решение системы (15). Следовательно, $C''\subset C$. Если $x^0=\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)\in C$, то неравенству $x_1^0x_1+\ldots+x_n^0x_n\leqslant 0$ удовлетворяют все образующие элементы $(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ конуса C'. Следовательно, это неравенство является следствием взятой системы неравенств с множеством решений C'. Пользуясь здесь теоремой 2.3, получаем, что $x^0\in C''$. Следовательно, $C''=C$.

При $P=R$, $r=n$ и дополнительном требовании устойчивой совместности системы (15) теорема 2.16 установлена Вейлем [3].

При $P=R$ и ранге r системы (15), совпадающем с числом n ее неизвестных, утверждение теоремы 2.16 о конечности числа образующих элементов конуса C, как уже отмечалось, установлено Минковским [43].

В статье Чарнеса и Купера [33] это утверждение доказано для системы (15) ранга $r \leqslant n$ с коэффициентами из произвольного упорядоченного поля P.

Из теоремы 2.16 вытекает

Теорема 2.17. Двойственный конус $(H')'$ двойственного конуса H' для произвольного конечно порожденного конуса H пространства P^n совпадает с H.

Определение 2.9. Полярой A^* конуса A с образующими элементами $(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ называется конус решений системы

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Пользуясь теоремой 2.3, нетрудно убедиться, что поляра A^* конечно порожденного конуса A не зависит от выбора конечной системы его образующих элементов.

Теперь основное утверждение теоремы 2.16 можно сформулировать так.

Двойственный конус произвольного конечно порожденного конуса из P^n совпадает с его полярой.

Теорема 2.17 становится равносильной следующему утверждению.

Для любого конечно порожденного конуса A из P^n справедливо соотношение $(A^*)^* = A$.

Существенную роль играет далее

Определение 2.10. Некоторое решение системы (15) отличного от нуля ранга r назовем существенным решением, если оно не обращает в равенства всех ее неравенств. Существенное решение, для которого обращаются в равенства $r-1$ каких-нибудь ее неравенств с линейно независимыми левыми частями (линейно независимые неравенства), будем называть фундаментальным решением; в соответствии с этим определением при $r=1$ фундаментальным следует считать любое устойчивое решение. Два фундаментальных решения будут считаться существенно различными, если в системе (15) не существует $r-1$ таких линейно независимых неравенств, которые обращаются в равенства для каждого из них. Максимальную систему существенно различных фундаментальных решений системы (15) назовем фундаментальной системой ее решений.

При $r=1$, очевидно, не может существовать двух существенно различных фундаментальных решений.

Теорема 2.18. Если система (15) имеет существенные решения, то она имеет хотя бы одно фундаментальное решение. Если

$$x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \quad (k = 1, 2, \ldots, l)$$

— какая-нибудь фундаментальная система решений системы (15) и $\bar{x}$ — произвольное ее несущественное решение, т. е. произвольное решение системы ее граничных уравнений

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{16}$$

то произвольное решение системы (15) выражается формулой

$$x = \bar{x} + \sum_{k=1}^{l} p_k x^k,$$

где $p_1, \ldots, p_l$ — произвольные неотрицательные элементы поля P. Элементы двух любых фундаментальных систем решений системы (15) совпадают с точностью до положительных множителей из поля P и слагаемых, удовлетворяющих системе (16).

Примечание. Если

$$\bar{x}^k = (\bar{x}_1^k, \ldots, \bar{x}_n^k) \quad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

— максимальная система линейно независимых решений системы (16), то произвольное решение $\bar{x}$ системы (16) запишется в виде

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{h} q_k \bar{x}^k,$$

где q_k $(k = 1, 2, \ldots, h)$ — произвольные элементы поля P, или в виде

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{h} \bar{p}_k \bar{x}^k + \bar{p}_0 \sum_{k=1}^{h} (-\bar{x}^k),$$

где $\bar{p}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, h)$ — произвольные неотрицательные элементы поля P.

Для системы (15) ранга n над пространством R^n теорема 2.18 установлена Минковским [43].

Доказательство опирается на следствие 2.6, теорему 2.15 и теорему 2.16.

§ 5. СОПРЯЖЕННЫЙ КОНУС ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Определение 2.11. Сопряженным конусом произвольной системы линейных неравенств

$$l_j(x) - a_j = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0 \tag{17}$$

над пространством P^n называется двойственный конус системы

$$l_j(x) - a_j t = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - a_j t \leqslant 0 \qquad (18)$$
$$(j = 1, 2, \dots, m) \quad -t \leqslant 0$$

однородных линейных неравенств над пространством P^{n+1}.

Отметим здесь, что с введением определения 2.11 теорема 2.3 для $L(P) = P^n$ принимает здесь следующую компактную форму.

Для того чтобы неравенство

$$l(x) - b = b_1x_1 + \dots + b_nx_n - b \leqslant 0$$

было следствием совместной системы (17), необходимо и достаточно, чтобы ее сопряженный конус содержал элемент $(b_1, \dots, b_n, -b)$.

Так как система (17) тогда и только тогда не совместна, когда неравенство $t \leqslant 0$ является следствием системы (18), то отсюда вытекает

Теорема 2.19. Система (17) тогда и только тогда несовместна, когда ее сопряженный конус K содержит элемент $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ пространства P^{n+1}.

Из этой теоремы вытекает, что сопряженный конус совместной системы (17) всегда отличен от пространства P^{n+1}.

Определение 2.12. Граничной подсистемой системы (3) назовем любую ее подсистему отличного от нуля ранга, составленную из неравенств, обращающихся в равенства для некоторого решения системы (3). Граничную подсистему, несодержащуюся ни в одной отличной от нее граничной подсистеме, назовем экстремальной подсистемой.

Теорема 2.20. Если

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \quad (k = 1, 2, \dots, l)$$

— узловые решения экстремальных подсистем системы (17) (отличного от нуля ранга), взятые по одному для каждой из них,

$$y^k = (y_1^k, \dots, y_n^k) \quad (k = 1, 2, \dots, h)$$

— максимальная система линейно независимых решений системы

$$l_j(x) = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

$$y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0) = -\sum_{k=1}^{h} (y_1^k, \dots, y_n^k)$$

и

$$z^k = (z_1^k, \dots, z_n^k) \quad (k = 1, 2, \dots, g)$$

— фундаментальная система решений системы $l_j(x) \leqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, то множество M элементов

$$(x^k, 1)\ (k = 1, 2, \ldots, l),\ (y^k, 0)\ (k = 0, 1, \ldots, h),$$
$$(z^k, 0)\ (k = 1, 2, \ldots, g)$$

пространства P^{n+1} является множеством образующих элементов конуса K', двойственного для сопряженного конуса K системы (17) (или, что того же конуса решений системы (18) — см. теорему 2.16), содержащим наименьшее число элементов.

Нетрудно убедиться, что элементы

$$(x^k, 1)\ (k = 1, 2, \ldots, l) \text{ и } (z^k, 0)\ (k = 1, 2, \ldots, g)$$

составляют фундаментальную систему решений системы (18). Элементы

$$(y^k, 0)\ (k = 1, 2, \ldots, h)$$

составляют максимальную систему линейно независимых решений граничной системы уравнений для системы (18). Поэтому основное утверждение теоремы сводится к теореме 2.18.

Определение 2.13. Центроидом конечного множества элементов $x^1, \ldots, x^l$ из P^n называется совокупность элементов из P^n, определяемых формулой $x = p_1 x^1 + \ldots + p_l x^l$, где $p_1, \ldots, p_l$ — произвольные неотрицательные элементы поля P с равной единице суммой $p_1 + \ldots + p_l$. Такой центроид называется конечно порожденным, а элементы $x^1, \ldots, x^l$ — его образующими элементами.

Теорема 2.21. (Для $P = R$ см. [12]). Множество D решений совместной системы (17) отличного от нуля ранга является алгебраической суммой конуса C решений отвечающей ей системы $l_j(x) \leqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и центроида E множества узловых решений всевозможных экстремальных подсистем системы (17), взятых произвольно по одному для каждой из них.

Теорема 2.22. (Для $P = R$ см. [39]). Если некоторое множество F пространства P^n разлагается в алгебраическую сумму конечно порожденного выпуклого конуса A и конечно порожденного центроида H, то оно является множеством решений хотя бы одной системы линейных неравенств над P^n (т. е. вида (17)), причем для любой из них множество решений системы однородных неравенств, получающейся вычеркиванием ее свободных членов, совпадает с конусом A.

Доказательство теоремы 2.21. Пусть K — сопряженный конус какой-нибудь совместной системы (17). Ввиду теоремы 2.16 его двойственный конус K' совпадает с множеством решений отвечающей ей системы (18). Поэтому множество D решений рассматриваемой системы (17) совпадает с множеством K'_1 таких элементов $x \in P^n$, для которых $(x, 1) \in K'$. При обозначениях теоремы 2.20 конус K' совпадает с алгебраической суммой двух конусов: конуса с образующими элементами

$$(y^k, 0) \ (k=0, 1, \ldots, h), \ (z^k, 0) \ (k=1, 2, \ldots, g)$$

и конуса с образующими элементами

$$(x^k, 1) \ (k=1, 2, \ldots, l).$$

Так как ввиду теоремы 2.18 элементы

$$y^k \ (k=0, 1, \ldots, h), \ z^k \ (k=1, 2, \ldots, g)$$

порождают конус C решений системы $l_j(x) \leqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, то отсюда вытекает, что произвольный элемент множества K'_1 представляется в виде $c + p_1x^1 + \ldots + p_lx^l$, где $c \in C$ и $p_1, \ldots, p_l$ — произвольные неотрицательные элементы поля P с равной единице суммой $p_1 + \ldots + p_l$. Следовательно, $D = C + E$. Теорема доказана.

Следствие 2.7. Если

$$F = A_1 + H_1 = A_2 + H_2$$

— два разложения множества $F \subset P^n$ в сумму конечно порожденного выпуклого конуса и конечно порожденного центроида, то $A_1 = A_2$. Если множество H^*_i $(i = 1, 2)$ образующих элементов центроида H_i $(i = 1, 2)$ не содержит ни одного элемента, представимого в виде суммы какого-нибудь элемента центроида, порожденного остальными элементами этого множества и какого-нибудь элемента конуса $A = A_1 = A_2$, то с точностью до слагаемых из максимального подпространства A' конуса A элементы множеств H^*_1 и H^*_2 совпадают.

§ 6. СОВОКУПНОСТЬ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ ПРОСТРАНСТВА P^n

Будем обозначать через $\mathfrak{C}(P^n)$ совокупность конечно порожденных конусов пространства P^n и через C^* поляру произвольного ее элемента C. Из результатов § 4 без труда усматривается справедливость следующего предложения (для $P = R$ см. [38] и [40]).

Теорема 2.23. Конечно порожденные конусы пространства P^n составляют структуру $\mathfrak{C}(P^n)$ относительно теоретикомножественного включения. Отображение $C \leftarrow\rightarrow C^*$ — ее двойственный автоморфизм, сопоставляющий произвольному конусу $C \in \mathfrak{C}(P^n)$ его ортодополнение $C^* \in \mathfrak{C}(P^n)$.

Первое утверждение теоремы означает, что совокупность $\mathfrak{Z}(P^n)$ имеет следующие свойства.

1. Для любых двух элементов C_1 и C_2 совокупности $\mathfrak{C}(P^n)$ их пересечение $C_1 \cap C_2$ — элемент той же совокупности.

2. Для любых двух элементов C_1 и C_2 из $\mathfrak{C}(P^n)$ алгебраическая сумма $C_1 + C_2$, т. е. наименьший выпуклый конус $C_1 \cup C_2$, содержащий конусы C_1 и C_2, является элементом из $\mathfrak{C}(P^n)$.

Второе утверждение теоремы означает, что соответствие $C \leftarrow\rightarrow C^*$ обладает следующими свойствами:

а) $C^{**} = C$;

б) $C_1^* = C_2^*$ тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2$;

в) для любого элемента $C^0 \in \mathfrak{C}(P^n)$ существует такой элемент $C_0 \in \mathfrak{C}(P^n)$, что $C^0 = C_0^*$;

г) $C_1^* \subset C_2^*$ тогда и только тогда, когда $C_2 \subset C_1$;

д) $(C_1 \cap C_2)^* = C_1^* \cup C_2^*$;

е) $(C_1 \cup C_2)^* = C_1^* \cap C_2^*$;

ж) $C \cap C^*$ — нулевой конус, $C \cup C^* = P^n$ (ортодополняемость).

§ 7. УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ НЕРАВЕНСТВА СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Пусть $c_j = (c_{j1}, \ldots, c_{jn})$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — система ненулевых образующих элементов конуса C пространства P^n и $(u_1^0, \ldots, u_m^0)$ — неотрицательное решение уравнения $c_1 u_1 + \ldots + c_m u_m = 0$, имеющее наибольшее число положительных координат. Если $j_1, \ldots, j_k$ — номера положительных координат решения $(u_1^0, \ldots, u_m^0)$, то элементы $c_{j_1}, \ldots, c_{j_k}$ являются образующими элементами максимального линейного подпространства конуса C. В системе неравенств

$$c_{j1} x_1 + \ldots + c_{jn} x_n \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

элементам $c_{j_1}, \ldots, c_{j_k}$ отвечают те ее неравенства, которые можно заменить равенствами, не нарушая множества ее решений. Если конус C острый (не содержит ненулевых подпространств), то рассматриваемая система таких неравенств не содержит и потому устойчиво совместна. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.25. Система линейных неравенств над пространством P^n, не содержащая нулевых неравенств, тогда и только тогда устойчиво совместна, когда ее сопряженный конус острый.

Для того чтобы формулировать получающиеся на этом пути результаты для системы линейных неравенств

$$f_j(x) - a_j \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{19}$$

над произвольным линейным пространством $L(P)$ дадим следующее определение (для систем линейных неравенств над пространством R^n оно дано в статье автора [14]).

Определение 2.14. Некоторое неравенство совместной системы (19) называется устойчивым ее неравенством, если хотя бы для одного ее решения оно не обращается в равенство; в ином случае оно называется неустойчивым ее неравенством.

Пользуясь этим определением, теоремой 2.25 и предшествующим ей предложением, нетрудно доказать (аналогично теореме 2.1) следующее предложение.

Для того чтобы система (19) была устойчиво совместной, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$u_1 f_1(x) + \ldots + u_m f_m(x) = 0 \quad (x \in L(P))] \tag{20}$$

не имело положительных решений, удовлетворяющих неравенству $a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m \leqslant 0$.

Это предложение по существу совпадают с теоремой 2.6 и отличается от нее только формулировкой. Для системы (19) над пространством $L(R)$ его можно найти в статье Фань Цзи [35].

Рассматриваемое предложение можно усилить следующим образом.

Теорема 2.26. Система (19) тогда и только тогда устойчиво совместна (просто совместна), когда каждой тождественно равной нулю линейной комбинации $p_{j_1} f_{j_1}(x) + \ldots + p_{j_s} f_{j_s}(x)$ (s — не фиксировано, $s \geqslant 1$) с положительными коэффициентами, охватывающей систему функций $f_{j_1}(x), \ldots, f_{j_s}(x)$ ранга $s-1$, отвечает неравенство

$$p_{j_1} a_{j_1} + \ldots + p_{j_s} a_{j_s} > 0 \quad (p_{j_1} a_{j_1} + \ldots + p_{j_s} a_{j_s} \geqslant 0)$$

либо, когда ни одной тождественно равной нулю комбинации с отмеченными свойствами не существует.

Для системы (19) над пространством R^n основное утверждение этой теоремы содержится в книге Александрова [1].

Некоторое обобщение рассматриваемого предложения дает

Теорема 2.27. Для того, чтобы система

$$\begin{aligned} &f_j(x) - a_j < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m'; \ m' \leqslant m), \\ &f_j(x) - a_j \leqslant 0 \quad (j = m' + 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{21}$$

была совместной, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (20) не имело ни положительных решений, удовлетворяющих неравенству $a_1u_1 + \ldots + a_mu_m < 0$, ни положительных решений, удовлетворяющих условиям

$$a_1u_1 + \ldots + a_mu_m = 0 \text{ и } u_1 + \ldots + u_{m'} > 0.$$

Если при переходе от системы (19) к системе (21) строгими неравенствами заменить все устойчивые ее неравенства, то получится такая система (21), которая будет эквивалентна системе

$$f_j(x) - a_j < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m'),$$
$$f_j(x) - a_j = 0 \quad (j = m' + 1, \ldots, m)$$

(т. е. они будут иметь одни и те же решения).

Пользуясь предложением, высказанным в начале параграфа, нетрудно получить следующую теорему.

Теорема 2.28. Для того чтобы подсистема

$$f_{j_k}(x) - a_{j_k} \leqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l) \tag{21'}$$

совместной системы (19) совпадала с подсистемой всех ее неустойчивых неравенств, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$u_1(f_1(x) - a_1) + \ldots + u_m(f_m(x) - a_m) = 0 \quad (x \in L(p)) \tag{22}$$

имело неотрицательное решение с положительными координатами $u_{j_1}, \ldots, u_{j_l}$ и не имело неотрицательных решений с другими положительными координатами.

Следствие 2.8. Для того чтобы система (19) была эквивалентна системе уравнений

$$f_j(x) - a_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

необходимо и достаточно, чтобы уравнение (22) имело строго положительное решение.

Для системы (19) над пространством $L(R)$ это предложение содержится в статье Фань Цзи [35].

Если (21′) — подсистема всех неустойчивых неравенств системы (19), то последняя эквивалентна системе

$$f_{j_k}(x) - a_{j_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l),$$
$$f_j(x) - a_j \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ j \neq j_1, \ldots, j_l),$$

вторая часть последней имеет устойчивое решение, удовлетворяющее всей системе (19).

§ 8. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ НЕРАВЕНСТВА СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Определение 2.15. Совместная система линейных неравенств называется несократимой, если она не содержит неравенств, которые можно удалить из нее, не меняя множества ее решений (зависимые неравенства).

Совместную систему, состоящую лишь из одного неравенства, будем считать несократимой, если входящая в него функция — ненулевая.

Теорема 2.29. Если две устойчиво совместных несократимых системы линейных неравенств (над $L(P)$) отличного от нуля ранга эквивалентны, то входящие в них неравенства несущественно различны (т. е. совпадают с точностью до положительных множителей из P).

Для систем линейных неравенств над пространством P^n это предложение вытекает из теоремы 2.25.

Теорема 2.30. Некоторое неравенство устойчиво совместной системы (19) тогда и только тогда является ее зависимым неравенством, когда ни одно из устойчивых решений подсистемы других ее неравенств не обращает его в равенство.

Следствие 2.9. Совместная система (19) отличного от нуля ранга, все неравенства которой с ненулевыми функциями $f_j(x)$ существенно различны, тогда и только тогда устойчиво совместна, когда она имеет граничное решение, удовлетворяющее одному и только одному из ее граничных уравнений.

При доказательстве достаточности этого предложения используется следующее предложение:

Совместная система (19) устойчиво совместна, если устойчиво совместна подсистема всех ее неравенств, обращающихся в равенства для какого-нибудь ее граничного решения.

ГЛАВА III

МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ОБЩЕЙ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

§ 1. ПОЛУЧЕНИЕ ОБЩЕЙ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Эта задача без труда сводится к задаче получения общей формулы неотрицательных решений произвольной системы однородных линейных неравенств. В самом деле, если

$$l_j(x) = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n \leqslant 0 \ (j = 1, 2, \dots, m) \qquad (1)$$

— произвольная система однородных линейных неравенств (над пространством P^n) и $y^k=(y_1^k, \ldots, y_n^k)$ $(k=1, 2, \ldots, h)$ — фундаментальная система решений системы

$$a_{j1}y_1+\ldots+a_{jn}y_n+a_{jn+1}y_{n+1}\leqslant 0 \ (j=1, 2, \ldots, m),$$
$$-y_i\leqslant 0 \ (i=1, 2, \ldots, n+1),$$

где $a_{jn+1}=-(a_{j1}+\ldots+a_{jn})$, то формула

$$x=p_1x^1+\ldots+p_hx^h,$$

где

$$x^k=(y_1^k-y_{n+1}^k, \ldots, y_n^k-y_{n+1}^k) \ (k=1, 2, \ldots, h)$$

и $p_1, \ldots, p_h$ — произвольные неотрицательные элементы поля P, является общей формулой решений системы (1).

Для получения общей формулы неотрицательных решений произвольной системы однородных линейных неравенств, очевидно, можно воспользоваться следующей теоремой (для $P=R$ см. [32]).

Теорема 3.1. Если $v^1, \ldots, v^l$ $(l>1)$ — фундаментальная система $V(C)$ решений системы (1) ранга $r=n$ и

$$l(x)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n\leqslant 0$$

— произвольное линейное неравенство (над P^n), то те элементы v^i, для которых $l(v^i)\leqslant 0$, и те элементы

$$v^q|l(v^p)|+v^p|l(v^q)|$$

с $l(v^p)|l(v^q)<0$ (отличающиеся один от другого хотя бы одним из индексов p, q), для каждого из которых существуют $n-2$ линейно независимых неравенств $l_{j_i}(x)\leqslant 0$, обращающихся в равенства как для v^p, так и для v^q, составляют фундаментальную систему решений системы

$$l_j(x)\leqslant 0 \ (j=1, 2, \ldots, m), \ l(x)\leqslant 0.$$

Если таких элементов не существует, то последняя не имеет фундаментальных решений. Среди неравенств системы (1), обращаемых в равенства как элементом v^p, так и элементом v^q системы $V(C)$, тогда и только тогда существует $n-2$ линейно независимых неравенств (т. е. с линейно независимыми левыми частями), когда ни один из других элементов системы $V(C)$ не обращает все их в равенства.

Эта теорема дает алгебраическое изложение метода двойного описания Моцкина [10] при дополнительном условии совпадения ранга r системы (1) с числом ее неизвестных.

Применение метода Моцкина — Бургера (теорема 3.1) для получения интересующей нас общей формулы неотрицательных решений начинается с присоединения к системе

$$-x_i \leqslant 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

неравенства $l_1(x) \leqslant 0$ и нахождения фундаментальной системы решений полученной системы. Затем к последней присоединяется еще неравенство $l_2(x) \leqslant 0$ и снова применяется теорема 3.1. В заключение получится фундаментальная система решений для системы

$$-x_i \leqslant 0 (i = 1, 2, \ldots, n), \ l_j(x) \leqslant 0 (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (2)$$

а вместе с ней и интересующая нас общая формула.

§ 2. АЛГОРИТМ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ОБЩЕЙ ФОРМУЛЫ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Предлагаемый здесь алгоритм разработан Черниковой [26] на основе метода Моцкина — Бургера (теорема 3.1). Алгоритм сводится к последовательным однотипным преобразованиям таблицы

$$T' = (T_1^1|T_2^1) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 & a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right),$$

в которой левая часть T_1^1 (до вертикальной черты) — единичная матрица E_n n-ой степени и правая часть T_2^1 — транспонированная матрица матрицы системы (1). Для удобства изложения будем считать, что все таблицы $T^i (i = 2, 3, \ldots)$, получаемые в результате последовательных преобразований таблицы T^1, помещаются под таблицей T^1 как ее последовательные продолжения вниз и имеют общую с ней разделяющую вертикальную черту; при этом левая и правая части таблицы $T^i (i = 2, 3, \ldots)$ будут обозначаться соответственно через T_1^i и T_2^i и столбцы всех таблиц T_2^i номероваться слева направо числами $1, 2, \ldots, m$. Переходя к изложению алгоритма, рассмотрим подробно преобразование таблицы T^1 в таблицу T^2.

Если все элементы какого-нибудь столбца таблицы $T_2{}^1$ неположительны (неположительный столбец), то заменяем их нулями; отвечающее ему неравенство системы (1) является, очевидно, зависимым неравенством системы (2).

Затем выбирается основной столбец таблицы T^1. За основной ее столбец можно принять любой из столбцов таблицы

$T_2{}^1$, имеющий хотя бы один положительный элемент. Если таких столбцов не окажется, то таблица T^2 не существует. Пусть t^1 — основной столбец таблицы T^1. Тогда в таблицу T^2 прежде всего переносятся строки таблицы T^1, пересекающиеся с ним по неположительным элементам.

Другие строки таблицы T^2 получаются комбинированием некоторых пар строк таблицы T^1. Для того чтобы выделить такие пары, условимся называть допустимой пару строк таблицы T^1, если содержащиеся в них элементы основного столбца являются ненулевыми элементами противоположных знаков. Если таблица T^1 содержит более двух строк и существуют столбцы таблицы $T_1{}^1$, пересекающие по нулевым элементам обе строки допустимой пары, но не существует никакой другой строки таблицы T^1, пересекающейся по нулевым элементам со всеми столбцами такого рода, то при этом условии допустимую пару назовем уравновешенной (для таблицы T^1 это условие здесь всегда выполняется и формулируется здесь лишь для единообразия в описании преобразований таблиц T^i). Если таблица T^1 содержит две строки и они составляют допустимую пару, то эта пара считается уравновешенной.

Строкой равновесия уравновешенной допустимой пары строк таблицы T^1 назовем такую их линейную комбинацию с положительными коэффициентами из поля P, которая пересекается по нулевому элементу со столбцом t^1 (имеет нуль на месте, определяемом t^1). Строки равновесия всех уравновешенных пар таблицы T^1 вносятся в таблицу T^2. После этого все ненулевые элементы столбца таблицы T^2, возникшего из основного столбца t^1, заменяются элементом -1, а все элементы других неположительных ее столбцов нулями. На этом составление таблицы T^2 заканчивается.

При переходе от таблицы T^2 к таблице T^3 и вообще при переходе от таблицы T^i с $i \geqslant 2$ к таблице T^{i+1} в этой процедуре меняется, во-первых, совокупность допустимых пар, называемых уравновешенными. Для таблицы T^i с числом строк большим двух уравновешенной теперь называется любая допустимая пара, для которой в таблице $T_1{}^i$, дополненной столбцами, возникшими из основных столбцов $t^1, \ldots, t^{i-1}$ таблиц $T_1, \ldots, T^{i-1}$, существуют столбцы, пересекающие обе ее строки по нулевым элементам, но не существует ни одной другой строки таблицы T^i, пересекающей по нулевым элементам все столбцы такого рода. Для таблицы T^i с двумя строками, составляющими допустимую пару, эта пара считается уравновешенной. Во-вторых, элементом -1 заменяются теперь не только ненулевые элементы столбца таблицы T^{i+1}, возникшего из основного столбца t^i таблицы T^i, но и все ненулевые элементы ее столбцов, возникших из основных столбцов

$t^1, \ldots, t^{i-1}$ предыдущих таблиц. Нулями заменяются при этом лишь элементы остальных неположительных столбцов правой части T_2^{i+1} таблицы T^{i+1}.

Заметим здесь, что все допустимые пары строк таблицы T^1 уравновешены.

Через конечное число шагов рассматриваемый процесс приводит к таблице T^k, в правой части которой либо все столбцы неположительны, либо хотя бы один столбец строго положителен (т. е. положительны все его элементы). В первом случае процесс оканчивается ввиду невозможности выбрать основной столбец, а во втором — с выбором строго положительного столбца в качестве основного столбца. В обоих случаях следующая таблица не существует.

В первом случае векторы-строки $x^1, \ldots, x^l$ левой части T_1^k таблицы T^k составляют фундаментальную систему решений системы (2) и потому общая формула неотрицательных решений системы (1) будет иметь вид

$$x = p_1 x^1 + \ldots + p_l x^l, \quad p_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Во втором случае неотрицательных решений, отличных от нулевого, система (1) не имеет.

Изложенная вычислительная схема может быть использована также для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы неоднородных линейных неравенств

$$l_j(x) - a_j = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (3)$$

так как этот вопрос полностью сводится к нахождению фундаментальной системы решений системы однородных линейных неравенств

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j x_{n+1} \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$
$$-x_i \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

(см. [26]).

В заключение настоящего параграфа покажем, что получение общей формулы решений для системы (1) можно свести к получению общей формулы неотрицательных решений для некоторой системы уравнений, связанной с системой (1). В самом деле, вместо системы (1) можно рассматривать равносильную ей систему уравнений

$$l_j(x) = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = -u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

с неотрицательными параметрами u_j. Считая ранг r системы (1) отличным от нуля, применим здесь алгоритм Гаусса для исключения неизвестных $x_1, \ldots, x_n$. Не нарушая общности, можно считать, что получающиеся при этом формулы для неизвестных и уравнения для параметров имеют вид

$$x_s = b_{s1}u_1 + \dots + b_{sr}u_r + a'_{s1}x_{r+1} + \dots + a'_{sn-r}x_n \quad (s = 1, 2, \dots, r),$$

$$c_{1i}u_1 + \dots + c_{ri}u_r + u_{r+i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m - r).$$

Если $m = r$, то уравнений здесь не будет и потому полученные формулы выразят общую формулу решений системы (1). При $r < m$ можно воспользоваться здесь алгоритмом для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы уравнений, аналогичным алгоритму, изложенному выше (см. [25], см. также гл. IV, § 3).

§ 3. ПОЛУЧЕНИЕ ОБЩЕЙ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Для получения общей формулы решений системы (3), очевидно, достаточно получить общую формулу решений отвечающей ей системы

$$a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n - a_j x_{n+1} \leq 0 \qquad (4)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m)$$

и, положив $x_{n+1} = 1$, преобразовать ее в интересующую нас формулу для системы (3). Как отмечалось в § 1, получение общей формулы для системы (4) сводится к нахождению общей формулы неотрицательных решений для некоторой связанной с ней системы. Таким образом, получение общей формулы для системы (3) сводится к применению алгоритма, изложенного в § 2 или к применению алгоритма, отмеченного в конце § 2.

Получение общей формулы решений системы (3) можно свести к нахождению вершин некоторых связанных с ней полиэдральных множеств и для нахождения вершин воспользоваться, например, алгоритмом, изложенным в статье Балинского [30]; алгоритм сводится к многократному применению основной процедуры симплекс-метода [30].

ГЛАВА IV

СВЕРТЫВАНИЕ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ. ИСКЛЮЧЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ

Настоящая глава посвящена вопросам, связанным с исключением неизвестных из конечных систем линейных неравенств. В основу ее положены результаты статей автора [17], [22]. Как уже отмечалось, алгоритм исключения неизвестных для систем линейных неравенств предложен еще Фурье [37]. Однако алгоритм Фурье требует огромного числа элементарных операций и оно растет чрезвычайно быстро с ростом числа неизвестных и неравенств; поэтому он использовался только для теоретических целей [42]. Для использования его в вычислительных целях потребовалось прежде всего выяснить вопрос о возможности сокращения числа предусматриваемых им комбинирований с целью последовательного исключения неизвестных. На этом пути возник вопрос, при каких условиях из совместности системы неравенств, составленной из неравенств произвольной системы

$$a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn} - a_j \leqslant 0 \ (j = 1, 2, \dots, m) \qquad (*)$$

(над пространством P^n, P — произвольное упорядоченное поле) умножением на положительные числа и сложением (положительное линейное комбинирование) вытекает совместность последней.

В связи с этим вопросом было получено описание тех способов положительного линейного комбинирования неравенств конечной системы (*), при которых взятые комбинации составляют такую конечную систему (свертку системы (*)), что множество ее решений в заданном подпространстве рассматриваемого пространства совпадает с проекцией в него множества решений системы (*) (см. § 1 настоящей главы). При изучении вопроса о таком комбинировании (свертывании системы (*)) положительно решился вопрос о возможности сокращения числа комбинирований в методе Фурье и был найден простой способ для отсеивания лишних комбинирований (см. ниже § 2). Разработанный при этом алгоритм сокращенного свертывания системы позволяет решать ряд задач, связанных с конечными системами линейных неравенств, в частности, задачи линейного программирования.

§ 1. КОНУС СПЛЕТЕННОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ЕЕ СВЕРТКИ

Определение 4.1. Пусть

$$f_1(x), \dots, f_m(x) \qquad (1)$$

— какая-нибудь система линейных (т. е. аддитивных и однородных) функций, заданных на линейном пространстве $L(P)$ и U — какое-нибудь его подпространство. Конус $C(U)$ неотрицательных решений $(u_1, \dots, u_m)$ уравнения

$$u_1 f_1(x) + \dots + u_m f_m(x) = 0 \ (x \in U)$$

назовем конусом U-сплетенности системы функций (1). Совокупность номеров ненулевых координат произвольного ненулевого элемента конуса $C(U)$ будем называть индексом этого элемента. Если ранг системы функций $f_j(x)$, отвечающих ненулевым координатам элемента $u^0=(u_1^0, \ldots, u_m^0)$ конуса $C(U)$ на единицу меньше их числа, то элемент u^0 назовем фундаментальным элементом конуса $C(U)$.

Два элемента конуса $C(U)$ не считаются существенно различными, если они отличаются лишь положительным множителем. Фундаментальные элементы конуса $C(U)$ тогда и только тогда существенно различны, когда различны их индексы. При этом случай, когда индекс одного из них охватывает как истинную часть индекс другого, невозможен.

Теорема 4. 1. Максимальные системы существенно различных фундаментальных элементов ненулевого конуса $C(U)$ и только они являются его базисами.

Базис конуса — несократимая система его образующих элементов.

Определение 4. 2. Конусом U-сплетенности системы линейных неравенств

$$f_j(x)+t_j \leqslant 0 \quad (j=1,2, \ldots, m), \tag{2}$$

в которой $f_j(x)\,(j=1,2, \ldots, m)$ — линейные функции, заданные на $L(P)$, и t_j — параметры, принимающие те или другие значения из поля P, будем называть конус $C(U)$ U-сплетенности системы функций $f_j(x)$, входящих в ее неравенства. Конус $C(U)$ называется также конусом U-сплетенности любой системы, которая получается из системы (2) при любых значениях параметров t_j и, в частности, системы

$$f_j(x)-a_j \leqslant 0 \quad (j=1,2, \ldots, m) \tag{2°}$$

с

$$t_j=-a_j \quad (j=1,2, \ldots, m).$$

Определение 4.3. Если

$$c^i=(c_1^i, \ldots, c_m^i)\,(i=1,2, \ldots, k)$$

— некоторая конечная система ненулевых образующих элементов конуса $C(U)$ U-сплетенности системы (2), то система неравенств

$$c_1^i f_1(x)+\ldots+c_m^i f_m(x)+c_1^i t_1+\ldots+c_m^i t_m \leqslant 0 \tag{3}$$
$$(i=1,2, \ldots, k)$$

называется U-сверткой системы (2) и, в частности, при $t_j=-a_j\,(j=1,2, \ldots, m)$ — U-сверткой системы (2°). При этом индексами неравенств U-свертки называются индексы определяющих их элементов c^i. Если конус $C(U)$ — нулевой, то будем считать U-свертку пустой. При $U=L(P)$ U-свертку будем называть полной. Если $c^1, \ldots, c^k$ — базис конуса $C(U)$, то U-свертку будем называть фундаментальной U-сверткой.

Ввиду свойств конуса $C(U)$, отмеченных в связи с определением 4.1 и теоремы 4.1 имеют место следующие свойства U — сверток.

Теорема 4.2. Каждая U-свертка системы (2) содержит фундаментальную U-свертку и эквивалентна ей при каждом наборе значений параметров t_j, при котором она совместна; U — свертка фундаментальна тогда и только тогда, когда она не содержит ни одного неравенства с индексом, охватывающим индекс хотя бы одного из других ее неравенств. Две фундаментальные U-свертки с одним и тем же U совпадают с точностью до положительных множителей (из P) их неравенств.

Отсюда вытекает, что U-свертка системы (2) не перестает быть U-сверткой системы (2) если из нее удалить какое-нибудь неравенство с индексом, охватывающим индекс хотя бы одного из остающихся в ней неравенств.

Теорема 4. 3. Если для некоторого подпространства U из $L(P)$ конус $C(U)$ U-сплетенности системы(2) — ненулевой, то система (2) и каждая ее U-свертка по взятому U имеют решения в $L(P)$ при одних и тех же значениях входящих в них параметров t_l. Если конус $C(U)$—нулевой, то система (2) при любых значениях, входящих в нее параметров имеет решения в U.

Следствие 4. 1. Если система (2°) совместна, то совместна или пуста каждая ее U-свертка по любому подпространству U из $L(P)$ (в частности, полная свертка). Если какая-нибудь ее U-свертка (в частности, полная свертка) совместна или пуста хотя бы для одного подпространства $U \subset L(P)$, то она совместна.

Из определения 4.3 и теоремы 4.3 вытекает, что U-свертка S системы (2) с ненулевым конусом $C(U)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) каждое неравенство системы S является такой линейной комбинацией неравенств системы (2) с неотрицательными коэффициентами, из которых хотя бы один положителен, что входящая в нее комбинация функций $f_j(x)$ тождественно равна нулю на U;

б) для каждого набора значений параметров t_j множество решений системы S в любом прямом дополнении V подпространства U в $L(P)$ совпадает с проекцией в V множества решений системы (2) (при этом проекция пустого множества считается пустым множеством).

Считая параметры t_j системы (2) свободными, можно показать характеристичность этих свойств ее U-свертки.

Называя ядром системы (2) максимальное подпространство $H \subset L(P)$, на котором все функции $f_j(x)$ принимают лишь нулевые значения, отметим еще следующее свойство U-сверток.

Если некоторая U-свертка системы (2) по $U \not\subset H$ непуста, то ее ранг ниже ранга системы (2) не менее чем на размерность прямого дополнения H^* пересечения $H \cap U$ в U.

§ 2. ИСКЛЮЧЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ

Определение 4.4. Пусть U и U' — какие-нибудь подпространства из $L(P)$ и (3) ее U-свертка. Тогда U'-свертку системы (3) назовем повторной (U; U')-сверткой системы (2); при этом свертка пустой свертки считается пустой. Аналогично определяется повторная (U; U'; U'')-свертка системы (2) и т. д.

Теорема 4. 4. Любая повторная (U; U')-свертка системы (2) совпадает с некоторой ($U + U'$)-сверткой последней.

Перейдем теперь к вопросу об исключении неизвестных из системы

$$f_j(x) + t_j = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n + t_j \leqslant 0 \qquad (4)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

над пространством P^n. Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — подпространства, порожденные в P^n соответственно векторами

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

Лемма 4.1. Пусть $(U_1 + \ldots + U_k)$ — свертка системы (4) непуста. Пусть A^1 — столбец коэффициентов при x_1 в системе (4) и A^l $(l = 2, \ldots, k)$ — столбец коэффициентов при x_l в некоторой $(U_1 + \ldots + U_{l-1})$ — свертке системы (4). Если из k столбцов $A^1, \ldots, A^k$ s столбцов $(s \leqslant k)$ содержат элементы противоположных знаков, то ни один фундаментальный элемент конуса $C = C(U_1 + \ldots + U_k)$ для системы (4) не может содержать более $s + 1$ отличных от нуля координат.

Определение 4.5. Пусть A—некоторая система из m элементов $a_1, \ldots, a_m$ поля P и Z—система из m неизвестных $z_1, \ldots, z_m$. Каждой паре элементов $a_p > 0$ и $a_q < 0$ из A отнесем линейную форму $a_p z_q - a_q z_p$, каждому нулевому элементу a_s из A—форму z_s; будем говорить, что совокупность всех получаемых так форм (она может быть и пустой) получается в результате A-деформации системы Z. Если в системе A встречаются элементы противоположных знаков, то A-деформацию назовем деформацией сплетения.

Алгоритм сокращенного фундаментального свертывания.

1. Пусть A_1—какой-нибудь ненулевой столбец коэффициентов системы (4), например, столбец коэффициентов при неизвестном x_1. Производя A_1-деформацию левых частей системы (4), получаем систему S_1, являющуюся ее U_1-сверткой (очевидно, фундаментальной). Каждому неравенству системы S_1 сопоставим его индекс. Он совпадает, очевидно, с множеством номеров входящих в него параметров или, что то же, с множеством номеров тех неравенств, комбинированием которых оно получилось.

2. Пусть уже получена система S_k являющаяся фундаментальной $(U_1+ \ldots +U_k)$-сверткой системы (4) и A_{k+1}—какой-нибудь ненулевой столбец ее коэффициентов, например, столбец коэффициентов при x_{k+1}. Если A_{k+1}-деформация не является деформацией сплетения, то систему S_{k+1} получаем, производя A_{k+1}-деформацию левых частей неравенств системы S_k. Если же она является деформацией сплетения и при этом s деформаций из $k+1$ A_i-деформаций $(i=1, 2, \ldots, k+1)$—деформации сплетения, то для получения системы S_k+_1 поступаем следующим образом:

а) подвергаем A_{k+1}-деформации левые части неравенств системы S_k, но не комбинируем при этом левые части тех неравенств системы S_k, объединение индексов которых содержит более $s+1$ различных элементов;

б) из полученной так системы исключаем одно за другим каждое неравенство, индекс которого охватывает индекс хотя бы одного из оставшихся в ней неравенств.

В обоих случаях система S_{k+1} является фундаментальной $(U_1+ \ldots +U_{k+1})$—сверткой системы (4). Как и выше каждому неравенству полученной системы сопоставляется его индекс. Продолжая этот процесс и считая пустой любую свертку пустой свертки, получим через конечное число шагов (не больше ранга системы (4)) фундаментальную U-свертку системы (4) с $U=P^n$ (полная свертка).

Примечание 1. Условие а) при составлении системы S_{k+1} выполняется очевидным образом.

Условие б), как нетрудно убедиться, равносильно требованию не комбинировать те пары неравенств системы S_k, объединение индексов которых содержит индекс какого-нибудь третьего неравенства системы S_k.

Примечание 2. Если A_i-деформации выполнять здесь без ограничений а) и б), то рассмотренный алгоритм превращается в алгоритм последовательного свертывания из статьи автора [17], который можно назвать алгоритмом свободного свертывания. Ввиду теоремы 4.4 он дает последовательные $(U_1+ \ldots +U_k)$-свертки системы (4) (но не обязательно фундаментальные). Если учитывать лишь ограничение а), то получится алгоритм сокращенного свертывания, дающий также некоторые последовательные $(U_1 + \ldots + U_k)$-свертки.

Для получения последовательных фундаментальных $(U_1 + \ldots + U_k)$-сверток можно было бы, очевидно, ограничиться одним лишь требованием б). Однако выполнение требования а) уменьшает число шагов в применении требования б). Пункт а) позволяет дать оценку разрастания системы S_k с ростом k. Связанные с ним подсчеты показывают, что при $m=10$ ни одна из систем S_k не может содержать больше 36 неравенств.

Алгоритмы свертывания могут быть использованы для нахождения решений системы (4) с фиксированными значениями параметров t_j.

Пример. Дана система

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3 \leqslant 0 \\
2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 1 \leqslant 0 \\
-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 2 \leqslant 0 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2 \leqslant 0 \\
3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 1 \leqslant 0 \\
-2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 0 \leqslant 0.
\end{gathered}$$

Для нее U_1-свертка имеет вид

$$\begin{array}{rl}
3x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 5 \leqslant 0 & (1;\ 3) \\
0x_2 + x_3 + 2x_4 - 5 \leqslant 0 & (1;\ 4) \\
x_2 - x_3 + 3x_4 - 6 \leqslant 0 & (1;\ 6) \\
3x_2 + x_3 - 3x_4 - 3 \leqslant 0 & (2;\ 3) \\
-3x_2 + 3x_3 + x_4 - 3 \leqslant 0 & (2;\ 4) \\
-2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1 \leqslant 0 & (2;\ 6) \\
7x_2 + 0x_3 - 5x_4 - 5 \leqslant 0 & (3;\ 5) \\
-2x_2 + 3x_3 + x_4 - 5 \leqslant 0 & (4;\ 5) \\
-x_2 - 3x_3 - x_4 + 2 \leqslant 0 & (5;\ 6)
\end{array}$$

Рядом с неравенствами здесь написаны их индексы.

Составим далее фундаментальную $(U_1 + U_3)$-свертку

$$\begin{array}{rl}
3x_2 + 0x_4 - 5 \leqslant 0 & (1; 3) \\
-2x_2 + 0x_4 + 1 \leqslant 0 & (2; 6) \\
7x_2 - 5x_4 - 5 \leqslant 0 & (3; 5) \\
x_2 + 5x_4 - 11 \leqslant 0 & (1; 4; 6) \\
-3x_2 + 0x_4 - 3 \leqslant 0 & (4; 5; 6).
\end{array}$$

Фундаментальные $(U_1+U_3+U_4)$ и $(U_1+U_3+U_4+U_2)$-свертки имеют вид

$$\begin{aligned} 3x_2-5 &\leqslant 0 \quad (1;3)\\ -2x_2+1 &\leqslant 0 \quad (2;6)\\ -3x_2-3 &\leqslant 0 \quad (4;5;6) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} -7 &\leqslant 0 \quad (1;2;3;6)\\ -8 &\leqslant 0 \quad (1;3;4;5;6). \end{aligned}$$

Так как последняя из этих систем совместна, то в силу следствия 4.1 совместна и исходная система.

Подставляя одно из решений $(U_1+U_3+U_4)$-свертки, например, $x_2=1$ в (U_1+U_3)-свертку, берем $x_4 1$. Подставляя $x_2=x_4=1$ в $U_{\cdot 1}$свертку, берем $x_3=0$. Наконец, подставляя $x_2=x_4=1$ и $x_3=0$ в исходную систему, находим решение $(0,1,0,1)$ последней.

§ 3. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изложенный в предыдущем параграфе алгоритм может быть использован для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы однородных уравнений. В самом деле, пусть

$$a_{1i}u_1+\ldots+a_{mi}u_m=0 \ (i=1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

—некоторая система такого рода. Ясно, что множество M ее неотрицательных решений можно рассматривать как конус $C(U)$ с $U=P^n$ для системы неравенств

$$f_j(x)+t_j=a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n+t_j\leqslant 0 \ (j=1,2,\ldots,m) \tag{6}$$

с неизвестными $x_1,\ldots,x_n$ и параметрами $t_1,\ldots,t_m$. Но тогда ввиду теоремы 4.1 и определения фундаментальной U-сверки (см. § 1) справедлива

Теорема 4.5. Если

$$u_1^k t_1+\ldots+u_m^k t_m\leqslant 0 \ (k=1,2,\ldots,l)$$

— фундаментальная P^n-свертка системы (6), то $\left(u_1^k,\ldots\right.$ $\left.\ldots,u_m^k\right)$ — максимальная система существенно различных фундаментальных элементов конуса $C(P^n)$ неотрицательных решений системы (5) и потому формула

$$(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{k=1}^{l} p_k (u_1^k, \ldots, u_m^k), \qquad (7)$$

где $p_1, \ldots, p_l$ — неотрицательные параметры со значениями из поля P, дает все неотрицательные решения системы (5). Если фундаментальная P^n-свертка системы (6) пуста, то нулевое решение является единственным неотрицательным решением системы (5).

Вопрос о нахождении всех неотрицательных решений произвольной системы линейных уравнений

$$a_{1i}u_1 + \ldots + a_{mi}u_m = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

сводится к получению формулы (7) для системы однородных линейных уравнений

$$a_{1i}u_1 + \ldots + a_{mi}u_m - a_i u_{m+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

и выделению из нее решений с равной единице последней координатой u_{m+1}.

Если все коэффициенты системы (5) — рациональные (целые) числа, то все ее решения $(u_1^k, \ldots, u_m^k)$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ после умножения на подходяще выбранный множитель становятся целочисленными.

Сохраняя для последних прежние обозначения, получим формулу (7), которая при произвольных рациональных неотрицательных $p_1, \ldots, p_m$ будет давать все рациональные неотрицательные решения системы (5), и которая вполне приспособлена для нахождения всех целочисленных положительных решений последней.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СВЕРТЫВАНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Задачу максимизации для линейной функции $f(x)$ $(x \in L(p))$ и системы

$$f_j(x) - a_j \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (8)$$

(задача минимизации функции $f(x)$ сводится к задаче максимизации функции $-f(x)$) можно рассматривать как задачу нахождения решения (x, t) системы

$$\begin{aligned} &(f_j(x) - a_j \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (9)\\ &-f(x) + t \leqslant 0 \end{aligned}$$

над пространством $L(P)+P^1$ $(x \in L(P), t \in P^1)$, обладающего наибольшим значением t или, что то же, как задачу максимизации для линейной функции $\varphi(x, t)=t$ и системы (9) (совместность системы (8) заранее здесь не обуславливается).

Теорема 4.6. Если задача максимизации для линейной функции $f(x)$ и системы (8) разрешима, то разрешима и задача максимизации для функции $\varphi(x, t)$ $((x, t) \in L(P)+P^1)$ и каждой U-свертки (и, в частности, фундаментальной U-свертки) системы (9) по любому подпространству U из $L(P)$, причем оптимальные значения обеих задач совпадают.

Если какая-нибудь U-свертка системы (9) по какому-нибудь $U \subset L(P)$ пуста, то задача максимизации для функции $f(x)$ и системы (8) неразрешима.

Если задача максимизации для функции $\varphi(x, t)=t$ и какой-нибудь U-свертки (в частности, фундаментальной U-свертки) системы (9) по некоторому подпространству $U \subset L(P)$ разрешима, то разрешима и задача максимизации для функции $f(x)$ и системы (8).

Следствие 4.2. (Для $P=R$ см. [17]). Если задача максимизации для линейной функции $f(x)$ и системы (8) разрешима, то каждая полная свертка системы (9) содержит неизвестное t (т. е. в ней хотя бы один из коэффициентов при t отличен от нуля) и совместна. Если какая-нибудь полная свертка системы (9) содержит неизвестное t и совместна, то задача максимизации для функции $f(x)$ и системы (8) разрешима и ее оптимальное значение совпадает с максимальным значением t, удовлетворяющим рассматриваемой полной свертке.

Это предложение может быть использовано для решения следующей задачи. Определить область тех значений свободных членов a_j (они рассматриваются как параметры, принимающие значения из поля P) системы

$$a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n-a_j \leqslant 0 \quad (j=1, 2, \ldots, m)$$

с заданными коэффициентами a_{jl}, для которых задача максимизации, определяемая этой системой и функцией $b_1x_1+\ldots+b_nx_n$, разрешима.

Если в определении 4.3 неравенства системы (3), содержащие функции $f_j(x)$ $(j=m'+1, \ldots, m)$, сделать строгими неравенствами, то оно превратится в определение U-сверток системы

$$\begin{aligned} &f_j(x)-a_j \leqslant 0 \quad (j=1, 2, \ldots, m'), \\ &f_j(x)-a_j<0 \quad (j=m'+1, \ldots, m). \end{aligned} \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что для так определяемых сверток сохраняется в силе изложенный выше алгоритм свертывания.

Теорема 4.7. (Для $P = R$ см. [20]). Если задача максимизации для линейной функции $f(x)$ и системы (10) разрешима, то каждая полная свертка системы

$$\begin{aligned} f_j(x) - a_j &\leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m'), \\ f_j(x) - a_j &< 0 \quad (j = m' + 1, \ldots, m), \\ -f(x) + t &\leqslant 0 \end{aligned} \tag{11}$$

содержит параметр t и среди удовлетворяющих ей значений этого неизвестного существует наибольшее. Если какая-нибудь полная свертка системы (11) содержит неизвестное t и среди удовлетворяющих ей его значений существует наибольшее $t = T_0$, то задача максимизации для функции $f(x)$ и системы (10) разрешима и ее оптимальное значение совпадает с T_0.

Пример. Решить задачу максимизации для функции $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ и системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3 &< 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 1 &\leqslant 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 2 &\leqslant 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2 &\leqslant 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 1 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Полная фундаментальная свертка системы (11) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} -7 + 3t &< 0 \quad (1; 2; 3; 6) \\ -8 + 3t &< 0 \quad (1; 3; 4; 5; 6). \end{aligned}$$

Среди значений t, удовлетворяющих этой системе, не существует наибольшего и потому рассматриваемая задача максимизации неразрешима.

Определение 4.6. Задачей максимизации (минимизации) для линейной вектор-функции

$$F(x) = (f^1(x), \ldots, f^l(x)) \tag{12}$$

($f^i(x)$ — линейные функции на $L(P)$) и системы линейных неравенств (8) (над $L(P)$) называется задача нахождения такого решения $x = x^0$ этой системы, что ни одно из ее решений x не удовлетворяет неравенству $F(x^0) < F(x)$ ($F(x) < F(x^0)$).

Соотношение $x \leqslant y$ для элементов x и y пространства P^l означает, что все координаты элемента $y - x$ неотрицательны; если хотя бы одна из них при этом положительна, то употребляется соотношение $x < y$.

Определение 4.7. Решение $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ системы

$$a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n-a_j\leqslant 0\ (j=1,2,\ldots,m)$$

(над P^n) назовем ее верхне-экстремальным решением, если для любого $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)>0$ $(\varepsilon\in P^n)$ элемент $x^0+\varepsilon$ не является ее решением.

Теорема 4.8. (Для $P=R$ см. [21]). Если задача максимизации для вектор-функции (12) и системы (8) разрешима, то каждая полная свертка системы

$$\begin{aligned} &f_j(x)-a_j\leqslant 0\ (j=1,2,\ldots,m),\\ &-f^k(x)+t_k\leqslant 0\ (k=1,2,\ldots,l)\end{aligned}\qquad(13)$$

содержит каждый параметр t_k $(k=1,2,\ldots,l)$ (т. е. в ней хотя бы один коэффициент при каждом t_k отличен от нуля) и совместна. Обратно, если какая-нибудь полная свертка системы (13) содержит каждый параметр t_k и совместна, то рассматриваемая задача максимизации разрешима и ее оптимальные значения совпадают с верхнеэкстремальными решениями рассматриваемой свертки.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Александров А. Д.,** Выпуклые многогранники. Москва—Ленинград, 1950
2. **Беккенбах Э.,** Беллман Р., Неравенства. Москва, 1965 (РЖМат, 1966, 1Б89К)
3. **Вейль Г.,** Элементарная теория выпуклых многогранников. Сборник «Матричные игры», Москва, 1961, 254—273
4. **Вороной Г. Ф.,** О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. Собрание сочинений, т. II, Киев, 1952, 171—238.
5. **Гейл Д.,** Теория линейных экономических моделей. М., Изд-во ин. лит. 1963, (РЖМат, 1964, 1В402К)
6. **Еремин И. И.,** О несовместных системах линейных неравенств. Докл., АН СССР, 1961, **139**, № 6, 1280—1283 (РЖМат, 1962, 3А145)
7. **Канторович Л. В.,** Математические методы в организации и планировании производства. Изв. ЛГУ, Ленинград, 1939
8. —, Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. Докл. АН СССР, 1940, **28**, № 3, 212—215
9. **Кун Г. У. и Таккер А. У.** (ред), Линейные неравенства и смежные вопросы. Сб. статей. Перев. с англ. Прилож.: Теория игр и линейное программирование. С. Вайд, М., Изд-во ин. лит., 1959, (РЖМат, 1961, 11В165К)
10. **Моцкин Т. С.,** Райфа Х., Томпсон Дж. Л., Тролл Р. М. Метод двойного описания. Сборник «Матричные игры», Москва, 1961
11. **Ремез Е. Я.,** Про методи найкращого в розумінні Чебишева найближенного представлення функцій. Вид. Укр. Акад. наук, Київ, 1935
12. **Рубинштейн Г. Ш.,** Общее решение конечной системы линейных неравенств. Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 2, 171—177 (РЖМат, 1955, 1660)
13. **Черников С. Н.,** Обобщение теоремы Кронекера—Капелли о системах линейных уравнений. Матем. сб., 1944, **15**(57), № 3, 437—448

14. ————————, Системы линейных неравенств. Успехи матем. наук, 1953, 8, № 2(54), 7—73 (РЖМат, 1953, 68)
15. ————————, Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств. Матем. сб., 1956, 38, № 4, 479—508 (РЖМат, 1957, 6848)
16. ————————, Узловые решения систем линейных неравенств. Матем. сб., 1960, 50, № 1, 3—24 (РЖМат, 1961, 1А165)
17. ————————, Свертывание систем линейных неравенств. Докл. АН СССР, 1960, 131, № 3, 518—521 (РЖМат, 1961, 1А166)
18. ————————, Теоремы об отделимости выпуклых полиэдральных множеств. Докл. АН СССР, 1961, 138, № 6, 1298—1300 (РЖМат, 1962, 5А509)
19. ————————, Об основных теоремах теории линейных неравенств. Сибирский матем. ж., 1964, 5, № 5, 1181—1190 (РЖМат, 1965, 4А132)
20. ————————, Метод свертывания систем линейных неравенств. Успехи матем. наук., 1964, 19, № 5, 149—155 (РЖМат, 1965, 4А133)
21. **Черников С. Н.**, Свертывание систем линейных неравенств. В сб. «Памяти Н. Г. Чеботарева 1894—1947.», Казань, Казанский ун-т, 1964, 93—112 (РЖМат, 1965, 3А150)
22. ————————, Свертывание конечных систем линейных неравенств. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, 5, № 1, 3—20 (РЖМат, 1965, 7В153)
23. ————————, Полиэдрально замкнутые системы линейных неравенств. Докл. АН СССР, 1965, 161, № 1, 55—58 (РЖМат, 1965, 7А153)
24. ————————, Алгебраическая теория линейных неравенств. Докл. АН СССР, 1966, 169, № 4, 785—788 (РЖМат, 1966, 12А154)
25. **Черникова Н. В.**, Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 4, 733—738 (РЖМат, 1965, 4Б660)
26. ————————, Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965, 5, № 2, 334—337 (РЖМат, 1965, 9Б461)
27. **Школьник А. Г.**, Линейные неравенства. Докл. АН СССР, 1950, 70, № 2, 189—172
28. ————————, Линейные неравенства. Учен. зап., Моск. гор. пед. ин-та, 1951, 16, 127—174
29. **Эрроу К. Д.**, Гурвиц Л., Удзава Х., Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., Изд-во ин. лит. 1962, (РЖМат, 1962, 12В 413К)
30. **Balinski M. L.**, An algorithm for finding all vertices of convex polyhedral sets. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1961, 9, № 1, 72—88 (РЖМат, 1963, 8В341)
31. **Ben-Israel A.**, Notes on linear inequalities. I. J. Math. Analysis and Appl. 1964, 9, № 2, 303—314 (РЖМат, 1965, 8В168)
32. **Burger E.**, Über homogene lineare Ungleichungsysteme. Z. angew Math. und Mech., 1956, 36, № 3-4, 135—139 (РЖМат, 1957, 2905)
33. **Charnes A.**, Cooper W. W., The strong Minkowski—Farkas—Weyl theorem for vector spaces over ordered field. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, 44, № 9, 914—916 (РЖМат, 1960, 5638)
34. **Dines L. L.**, McCoy N. H., On linear inequalities. Trans Roy. Soc. Canada (3), 1933, 27, 37—70
35. **Fan Ky**, On systems of linear inequalities. Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 99—156 (РЖМат, 1957, 7162)
36. **Farkas J.**, Über Theorie der einfachen Ungleichungen. J. Reine Angew. Math., 1901, 124, 1—24
37. **Fourier J. B.**, Solution d'une question particuliere du calcul inégalités. Nouveau bulletin des siences par la société philomathiques de Paris. 1826, p. 99, oeuvres, II, Gauthier—Willars, Paris, 1890

38. **Gale D.**, Convex polyhedral cones and linear inequalities. Activity analysis production and allocation. Ed. Koopmans T. C. Cowles commission Monograph № 13, Wiley, New York, 1951
39. **Goldman A. J.**, Resolution and separation theorems for polyhedral convex sets. Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 41—51 (РЖМат, 1959, 4204)
40. —, Tucker A. W., Polyhedral convex cones. Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 19—40 (РЖМат, 1959, 5197)
41. —, —, Theory of linear programming. Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 53—97 (РЖМат, 1958, 3996)
42. **Kuhn H. W.**, Solvability and consistency for linear equations and inequalities. Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 4, 217—232 (РЖМат, 1957, 2903)
43. **Minkowski H.**, Geometrie der Zahlen. Teubner, Leipzig, 1896
44. **Tucker A. W.**, Dual systems of homogeneous linear relations. Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 3—18 (РЖМат, 1957, 5027)